

**GRÁFICOS EXISTENCIALES GAMA,
MODELOS DE KRIPKE Y HACES**

JUAN RICARDO PRADA

**UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
IBAGUÉ
2018**

**GRÁFICOS EXISTENCIALES GAMA,
MODELOS DE KRIPKE Y HACES**

JUAN RICARDO PRADA

Código 0967-00132015

Tesis para optar al título de Magister en Matemáticas

Director

ARNOLD OOSTRA

Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística

**UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
IBAGUÉ**

2018



UNIVERSIDAD DEL TOLIMA

FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

TÍTULO: GRAFICOS EXISTENCIALES GAMA, MODELOS DE KRIPKE Y HACES

AUTOR: JUAN RICARDO PRADA

Código: 096700132015

DIRECTOR: ANTON ARNOLD OOSTRA VANNOPE

JURADOS: JUAN CARLOS RIAÑO ROJAS

LEONARDO SOLANILLA CHAVARRO

CALIFICACIÓN CINCO CERO (5.0) LAUREADA

OBSERVACIONES: El documento tiene un estilo formal sobresaliente e impecablemente bien escrito. En el contenido abarca la teoría de manera completa, rigurosa detalla las pruebas, hay aportes novedosos en la construcción e integración de ambientes relacionados con la semántica de Kripke y los Gráficos Existenciales Gama al relaciona ciertas reglas sintácticas de los gráficos Existenciales Gama con ciertos modelos de Kripke de la Lógica Modal.

FIRMAS

JUAN CARLOS RIAÑO ROJAS
Jurado 1

LEONARDO SOLANILLA CHAVARRO
Jurado 2

ARNOLD OOSTRA VANNOPE
Director del trabajo

PABLO EMILIO CALDERÓN SAAVEDRA
Director del programa

Ciudad y fecha: **Manizales, Agosto 29 de 2018**

Dedicatoria

A Dios por darme la sabiduría para aprender cada día cosas nuevas, y en especial poder aprender y enseñar matemáticas. También se la dedico a mi madre, que con mucho esfuerzo a lo largo de su vida siempre ha buscado inculcarme los mejores valores y darme la formación necesaria para que afronte las circunstancias de la vida, pues siempre ha estado a mi lado apoyándome para seguir adelante.

Agradecimientos

Principalmente doy gracias al doctor Arnold Oostra, mi maestro que me ha guiado en el desarrollo de esta tesis con sus valiosos aportes y su ideas innovadoras propias de un genio. También doy gracias a la Universidad del Tolima por la formación que me ha brindado tanto en el pregrado como en la maestría, y por la oportunidad de ser docente de la misma. Finalmente, a todas las personas que de una u otra manera aportaron al desarrollo de esta tesis.

Tabla de Contenido

Introducción	7
1. Topologías asociadas a una relación	10
1.1. Definiciones	10
1.2. Comparación de topologías	12
1.3. Estudio dual	20
1.4. Una equivalencia de categorías	27
2. Haces para modelos de Kripke “modales”	37
2.1. Modelos de Kripke para la lógica modal	37
2.2. Haces	44
2.3. Modelos de Kripke como fibrados	52
3. Gráficos Gama como haces	63
3.1. Los gráficos existenciales Gama	63
3.2. Libros de Peirce-Kripke	79
3.3. Reglas para los libros de Peirce-Kripke	83
Bibliografía	106

Introducción

Los gráficos existenciales, propuestos hace un poco más de cien años por el lógico norteamericano Charles Sanders Peirce, constituyen un sistema lógico de representación icónica, el cual comprende tanto una notación gráfica original de proposiciones lógicas como también un sistema de cálculo lógico, determinado por las denominadas reglas de transformación. El autor distinguió tres subsistemas: Alfa que corresponde a la lógica proposicional clásica; Beta que corresponde al cálculo de predicados o lógica de primer orden; Gama que incluye sistemas de lógica modal [21, 23, 26, 28, 31].

A pesar de que los gráficos existenciales fueron considerados por Peirce como su “obra maestra”, no tuvieron el reconocimiento merecido en su momento ya que fueron calificados como un simple divertimento que no constituía un aporte significativo a los avances logrados en la lógica simbólica. Debido a esto el legado que nos heredó Peirce con sus sistemas diagramáticos permaneció menospreciado durante muchos años, pero a partir del año 1963 se empezó a reconocer el auténtico valor de los gráficos existenciales debido a las tesis doctorales de Roberts [23] y de Zeman [31]. A partir de allí se ha empezado a evidenciar un replanteamiento en la importancia de los aportes científicos consolidados por Peirce impulsados por personajes como Robert Burch, Geraldine Brady, Todd Trimble, Fernando Zalamea y Arnold Oostra desde las perspectivas topológica, categórica, filosófica e intuicionista de los gráficos respectivamente.

En el caso específico de los gráficos existenciales Gama, Peirce había propuesto diferentes reglas de transformación que permiten realizar auténtica lógica con los gráficos en general, y Zeman [31] adaptó estas reglas a los cortes quebrados obteniendo sistemas de gráficos existenciales para diversas lógicas modales (véase también [18] y [19]). Entre las reglas se destacan principalmente las de iteración y desiteración a través de cortes quebrados, que dan lugar a versiones gráficas para las lógicas modales S_4 , $S_{4.2}$ y S_5 , la primera y la última debidas originalmente a C. I. Lewis.

Mediante dichas lógicas modales de Lewis y los gráficos existenciales de Peirce se pueden abordar los conceptos de “posibilidad” y “necesidad” estudiados por filósofos como Aristóteles, Diodoro, Kant y Leibniz, y por el matemático Hugh MacColl quien fue el primero en analizar las modalidades en forma simbólica. Pero fue hasta 1965 que el filósofo Saul Kripke introdujo una semántica para las lógicas modales en la cual se puede evidenciar una conexión entre cierta relación binaria asociada a un modelo de Kripke y los axiomas de la lógica modal particular. Los modelos de Kripke también han sido estudiados desde el ámbito de la lógica intuicionista, por ejemplo el matemático Xavier Caicedo en su artículo [10] da una mirada global a la teoría de haces y su relación con los modelos de Kripke intuicionistas.

Así, existe una conexión entre las lógicas modales de Lewis y los gráficos existenciales Gama de Peirce, y a su vez, una conexión entre estas lógicas modales y los modelos de Kripke sobre una relación binaria arbitraria. Sin embargo, hasta ahora no existe una conexión directa y natural entre los modelos de Kripke sobre una relación y los gráficos existenciales Gama de Peirce. Como sucede casi siempre, el mismo Peirce dio un bosquejo de una posible conexión [20, Vol. 4, §512] considerando varias hojas de aserción de forma simultánea, lo cual resulta afín a la semántica de Kripke que no había sido concebida para la época. En la actualidad aún no se ha resuelto este problema de forma explícita, y ese es el objetivo trazado para la investigación que condujo a la presente tesis.

Con el fin de establecer una conexión entre dos ejes significativos de la lógica matemática como son los gráficos existenciales Gama y los modelos de Kripke para las lógicas modales, y realizando una generalización de la teoría de haces estudiada por Caicedo en los modelos de Kripke para la lógica intuicionista, pero en el contexto de las lógicas modales, en esta tesis se aborda dicho problema de una forma novedosa y global.

Este trabajo está dividido en tres capítulos, en los cuales cada uno aborda una temática determinada. En el capítulo 1 se indaga sobre ciertas topologías especiales construidas a partir de un conjunto dotado de una relación arbitraria, sus propiedades y conexiones, todo esto con el fin de obtener la topología adecuada para un modelo de Kripke dado.

El capítulo 2 se divide en tres partes. Primero se revisan los conceptos básicos asociados a la lógica modal y la semántica de Kripke para lógicas modales. La segunda parte consiste en desarrollar los preliminares de la teoría de haces y prehaces, junto con su versión en términos de espacios étale y fibrados. Finalmente, se propone una generali-

zación de la construcción de los haces asociados a modelos de Kripke intuicionistas que abarca también los modelos de Kripke asociados a lógicas modales, con el objetivo de presentar cada modelo de Kripke como un fibrado y así garantizar que existe su haz asociado.

El capítulo 3 también se divide en tres partes. Primero se presentan la semántica y la sintaxis de los gráficos existenciales Gama para las diferentes lógicas modales, como fueron estudiadas por Zeman. La segunda parte consiste en definir los gráficos existenciales Gama como un libro de hojas de aserción, combinando las estructuras de fibrados y haces estudiadas en el capítulo 2 con los gráficos existenciales Gama descritos anteriormente. Finalmente, se logra obtener todas las reglas de transformación Gama en cada lógica modal conocida como consecuencia de la relación subyacente a las hojas y a la adaptación propuesta.

El material de cada capítulo de esta tesis se basa en teoría matemática conocida y luego se proponen definiciones originales y se obtienen resultados nuevos. No se conoce un estudio sistemático de las topologías asociadas a relaciones binarias como se realiza en el capítulo 1 de esta tesis, además al final de esa parte se obtiene un resultado clásico de Alexandroff como consecuencia de una adjunción categórica. Por otro lado, es bien conocido que un modelo de Kripke para la lógica intuicionista puede verse como un haz. En el capítulo 2 se propone una construcción del todo original que abarca como casos particulares los modelos mencionados pero también los modelos de Kripke para las lógicas modales, que en general no resultan espacios étale sino solo fibrados. Finalmente, la definición de libros de hojas de aserción dada en el capítulo 3 significa un avance innovador en la teoría de los gráficos existenciales. Nunca se ha propuesto antes algo similar y el resultado es que las reglas de transformación Gama se obtienen de manera más natural y comprensible.

Capítulo 1

Topologías asociadas a una relación

En este capítulo se consideran algunas topologías construidas a partir a una relación binaria arbitraria sobre el conjunto base. Estas construcciones generalizan ciertas topologías asociadas a conjuntos ordenados.

1.1. Definiciones

En lo que sigue R es una relación binaria sobre un conjunto X , esto es, $R \subseteq X \times X$.

Afirmación 1.1. *Dado el conjunto*

$$\mathcal{C} = \{ S \subseteq X \mid x \in S, y R x \text{ implica } y \in S \}$$

entonces \mathcal{C} es una topología sobre X .

Demostración.

- $\emptyset \in \mathcal{C}$ porque para ningún elemento x se tiene $x \in \emptyset$.
- $X \in \mathcal{C}$ porque para todo elemento y se tiene $y \in X$.
- Dados $S, T \in \mathcal{C}$ y $x \in S \cap T$, sea y tal que $y R x$. Como $x \in S$ y $x \in T$, de $y R x$ se obtiene $y \in S$ y $y \in T$, es decir, $y \in S \cap T$ mostrando así que $S \cap T \in \mathcal{C}$.
- Dados $\{S_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{C}$ y $x \in \bigcup_{i \in I} S_i$, sea y tal que $y R x$. Por tanto $x \in S_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$ y como $y R x$, por hipótesis se tiene $y \in S_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$, es decir, $y \in \bigcup_{i \in I} S_i$ mostrando así que $\bigcup_{i \in I} S_i \in \mathcal{C}$.

□

Nota 1.2. Dada una familia cualquiera B de subconjuntos de X , existe una mínima topología sobre X para la cual todos los integrantes de B son abiertos. Esta se denomina la topología generada por B sobre X y se denota $\mathcal{T} = \langle B \rangle$. El conjunto B es una subbase de \mathcal{T} y una base $\beta(B)$ de \mathcal{T} está dada por:

$$\beta(B) = \left\{ \bigcap \{D_i \mid i \in I\} \mid I \text{ es un conjunto finito y } D_i \in B \right\}.$$

Cabe anotar que la intersección de la familia vacía, esto es, $I = \emptyset$ en el conjunto anterior, es el conjunto completo X [6, 27]. De manera que la familia B no tiene restricción alguna y en la base $\beta(B)$ siempre aparece de manera automática el conjunto X .

Definición 1.3. Sobre X se definen las topologías siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_R &= \{ S \subseteq X \mid x \in S, \text{ y } R x \text{ implica } y \in S \} \\ \mathcal{S}_R &= \langle G \rangle \text{ donde } G = \{U_x \mid x \in X\} \text{ y } U_x = \{y \in X \mid y R x\} \\ \mathcal{T}_R &= \langle H \rangle \text{ donde } H = \{V_x \mid x \in X\} \text{ y } V_x = U_x \cup \{x\} \end{aligned}$$

Definición 1.4. Un espacio topológico (X, τ) es de Alexandroff si la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Afirmación 1.5. La topología \mathcal{C}_R es una topología de Alexandroff sobre X .

Demostración. Dados $\{S_i\}_{i \in I} \in \mathcal{C}_R$ y $x \in \bigcap_{i \in I} S_i$, sea y tal que $y R x$. Por tanto $x \in S_i$ para cada $i \in I$ y como $y R x$, por hipótesis se tiene $y \in S_i$ para cada $i \in I$, es decir, $y \in \bigcap_{i \in I} S_i$ mostrando así que $\bigcap_{i \in I} S_i \in \mathcal{C}_R$. □

Ejemplo 1.6. En general, \mathcal{S}_R no es una topología de Alexandroff. Sea $X = [0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ y sea R la relación:

$$x R y \quad \text{si y solamente si} \quad x < y.$$

Luego:

$$\begin{aligned} G &= \{U_x \mid x \in X\} \text{ donde } U_x = [0, x), \\ \beta(G) &= G \cup \{[0, 1)\} = \mathcal{S}_R. \end{aligned}$$

Ahora, considérese la familia de abiertos de \mathcal{S}_R :

$$\left\{ \left[0, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

entonces:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n}\right) = \{0\} \notin \mathcal{S}_R.$$

Por tanto \mathcal{S}_R no es una topología de Alexandroff.

Ejemplo 1.7. En general, \mathcal{T}_R no es una topología de Alexandroff. Sea $X = \mathbb{R}$, y sea la relación:

$$x R y \quad \text{si y solamente si} \quad |x - y| < 2.$$

Se puede ver que R es una relación reflexiva pero no transitiva (pues $0 R \frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2} R 3$ pero no sucede que $0 R 3$). Luego:

$$V_x = \{y \in X \mid y R x\} \cup \{x\} = (x - 2, x + 2) \cup \{x\} = (x - 2, x + 2),$$

además:

$$H = \{V_x \mid x \in X\} \quad \text{donde} \quad V_x = (x - 2, x + 2).$$

Al realizar las intersecciones finitas de estos intervalos y luego las uniones arbitrarias resulta la topología usual de \mathbb{R} , la cual no es de Alexandroff pues dada la familia de abiertos de \mathcal{T}_R

$$\left\{ \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

se tiene

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\} \notin \mathcal{T}_R.$$

1.2. Comparación de topologías

Como se evidenció en los ejemplos anteriores, las topologías \mathcal{C}_R , \mathcal{S}_R y \mathcal{T}_R pueden ser distintas.

1.2.1. En general

Ejemplo 1.8. Considérese el conjunto $X = \{a, b, c\}$ dotado de la relación:

$$R = \{(a, b), (b, c)\}.$$

La figura 1.1 muestra la relación R mediante un diagrama. Esta relación se puede obtener considerando tres números naturales con el orden usual estricto no transitivo.

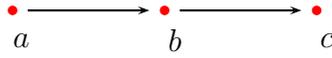


Figura 1.1: Diagrama del ejemplo 1.8

Se tiene:

$$\mathcal{C}_R = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}.$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned} G &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \\ \beta(G) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}, \\ \mathcal{S}_R &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}. \end{aligned}$$

Finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} H &= \{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}, \\ \beta(H) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}, \\ \mathcal{T}_R &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}. \end{aligned}$$

En este ejemplo se puede evidenciar que, en general, $\mathcal{T}_R \not\subseteq \mathcal{C}_R$, $\mathcal{T}_R \not\subseteq \mathcal{S}_R$ y $\mathcal{S}_R \not\subseteq \mathcal{C}_R$.

Ejemplo 1.9. Considérese el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ con la relación R dada por el diagrama de la figura 1.2. Esta relación se puede obtener considerando los divisores positivos de 6 con la divisibilidad estricta.

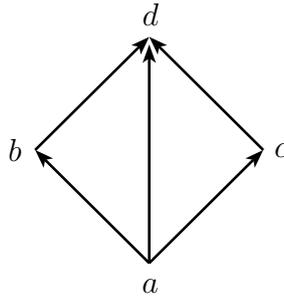


Figura 1.2: Diagrama del ejemplo 1.9

Entonces se tiene:

$$\mathcal{C}_R = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, X\}.$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned} G &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}, \\ \beta(G) &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}, X\}, \\ \mathcal{S}_R &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}, X\}. \end{aligned}$$

Finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} H &= \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}, \\ \beta(H) &= \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}, \\ \mathcal{T}_R &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, X\} = \mathcal{C}_R. \end{aligned}$$

En este ejemplo se puede evidenciar que, en general, $\mathcal{C}_R \not\subseteq \mathcal{S}_R$.

Ejemplo 1.10. Considérese el conjunto $X = \{a, b, c\}$ dotado de la relación

$$R = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}.$$

Esta relación se puede entender como el complemento de la igualdad o la relación “ser diferente de”. El diagrama de R se puede evidenciar en la figura 1.3.

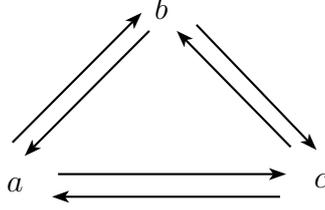


Figura 1.3: Diagrama del ejemplo 1.10

Entonces se tiene:

$$\mathcal{C}_R = \{\emptyset, X\}.$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned} G &= \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}\}, \\ \beta(G) &= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}, \\ \mathcal{S}_R &= \mathcal{P}(X). \end{aligned}$$

Finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} H &= \{X\}, \\ \beta(H) &= \{X\}, \\ \mathcal{T}_R &= \{\emptyset, X\} = \mathcal{C}_R. \end{aligned}$$

En este ejemplo se puede evidenciar que, en general, $\mathcal{S}_R \not\subseteq \mathcal{T}_R$.

Afirmación 1.11. Sea X un conjunto dotado de una relación binaria R . Para las topologías \mathcal{C}_R y \mathcal{T}_R se tiene $\mathcal{C}_R \subseteq \mathcal{T}_R$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{C}_R$. Para cada $x \in A$ se construye el conjunto:

$$V_x = \{y \in X \mid y R x\} \cup \{x\}.$$

Por definición de \mathcal{C}_R se tiene que $V_x \subseteq A$ para cada $x \in A$. Luego:

$$\bigcup_{x \in A} V_x \subseteq A.$$

Por otro lado, si $x \in A$ entonces $x \in V_x$, y por tanto $x \in \bigcup_{x \in A} V_x$. Por tanto se tiene:

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} V_x$$

mostrando así que

$$A = \bigcup_{x \in A} V_x.$$

Así se concluye que $A \in \mathcal{T}_R$, demostrando que $\mathcal{C}_R \subseteq \mathcal{T}_R$. □

Las relaciones de contención entre las topologías \mathcal{C}_R , \mathcal{S}_R y \mathcal{T}_R se pueden resumir en la figura 1.4 en la página siguiente.

1.2.2. Condiciones adicionales

Afirmación 1.12. Sea X un conjunto dotado de una relación reflexiva R . Para las topologías \mathcal{S}_R y \mathcal{T}_R descritas en la definición 1.3 se tiene $\mathcal{S}_R = \mathcal{T}_R$.

Demostración. En efecto, si la relación R es reflexiva entonces para cada x se tiene $x R x$ de donde $x \in \{y \in X \mid y R x\} = U_x$. En consecuencia $V_x = U_x \cup \{x\} = U_x$ para cada x , luego $G = H$ y por fin $\mathcal{S}_R = \langle G \rangle = \langle H \rangle = \mathcal{T}_R$. □

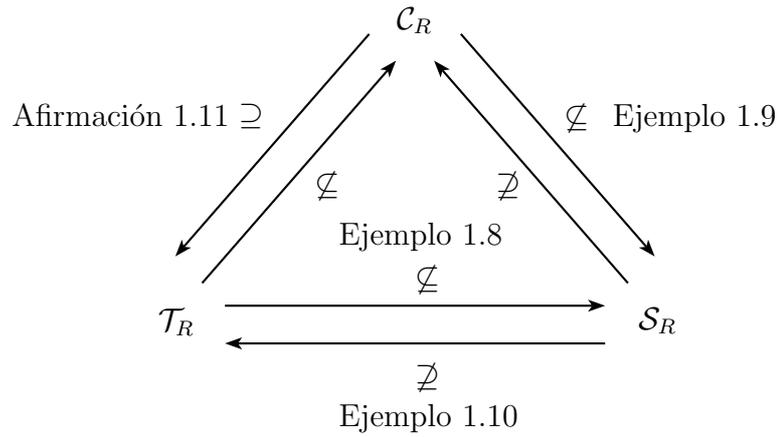


Figura 1.4: Relación entre las topologías \mathcal{C}_R , \mathcal{S}_R y \mathcal{T}_R

La recíproca no es cierta en general, como se puede evidenciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.13. *Considérese el conjunto $X = \{a, b, c\}$ dotado de la relación*

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}.$$

El diagrama de R se puede evidenciar en la figura 1.5.

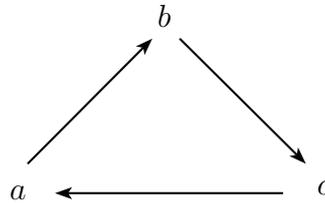


Figura 1.5: Diagrama del ejemplo 1.13

Entonces se tiene:

$$\mathcal{C}_R = \{\emptyset, X\}.$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned} G &= \{\{c\}, \{a\}, \{b\}\}, \\ \beta(G) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, X\}, \\ \mathcal{S}_R &= \mathcal{P}(X). \end{aligned}$$

Finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} H &= \{\{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}, \\ \beta(H) &= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}, \\ \mathcal{T}_R &= \mathcal{P}(X). \end{aligned}$$

Se puede ver que $\mathcal{S}_R = \mathcal{T}_R$, pero R no es reflexiva pues no se tiene aRa , bRb ni cRc .

Afirmación 1.14. Sea X un conjunto dotado de una relación transitiva R . Para las topologías \mathcal{C}_R y \mathcal{S}_R se tiene $\mathcal{S}_R \subseteq \mathcal{C}_R$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{S}_R$, y sean $x \in A$, $y \in X$ con yRx . Como $A \in \mathcal{S}_R$, entonces $A = \bigcup_{j \in J} B_j$ con $B_j \in \beta(G)$ para cada $j \in J$. Dado que $x \in A$, entonces $x \in B_{j_0}$ para algún $j_0 \in J$. Luego se tiene $B_{j_0} = \bigcap_{i=1}^n B_{j_0i}$ con $B_{j_0i} \in G$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, y por tanto $x \in B_{j_0i}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Para cada conjunto B_{j_0i} existe un elemento $x_{j_0i} \in X$ tal que $B_{j_0i} = U_{x_{j_0i}}$, de donde xRx_{j_0i} . Por hipótesis se tiene yRx y como R es transitiva entonces yRx_{j_0i} , y por tanto $y \in B_{j_0i}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Así se tiene $y \in B_{j_0}$, y por tanto $y \in B_{j_0} \subseteq \bigcup_{j \in J} B_j = A$, es decir, $y \in A$. Finalmente se ha podido verificar que $A \in \mathcal{C}_R$, y así $\mathcal{S}_R \subseteq \mathcal{C}_R$. \square

La recíproca de esta afirmación también es cierta, como se puede evidenciar a continuación.

Afirmación 1.15. En un conjunto X dotado de una relación binaria R se consideran las topologías \mathcal{C}_R y \mathcal{S}_R . Si $\mathcal{S}_R \subseteq \mathcal{C}_R$ entonces R es transitiva.

Demostración. Sean $a, b, c \in X$ tales que aRb y bRc . Entonces $b \in U_c$ y por hipótesis se tiene $U_c \in \mathcal{C}_R$. Dado que $b \in U_c$ y aRb se sigue $a \in U_c$, es decir, aRc y por tanto R es una relación transitiva. \square

Lo expuesto anteriormente se puede resumir en el siguiente corolario.

Corolario 1.16. En un conjunto X dotado de una relación binaria R se consideran las topologías \mathcal{C}_R y \mathcal{S}_R . Se tiene $\mathcal{S}_R \subseteq \mathcal{C}_R$ si y solamente si R es transitiva.

Afirmación 1.17. Sea X un conjunto dotado de una relación transitiva R . Para las topologías \mathcal{C}_R y \mathcal{T}_R se tiene $\mathcal{T}_R \subseteq \mathcal{C}_R$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{T}_R$, y sean $x \in A$, $y \in X$ con $y R x$. Como $A \in \mathcal{T}_R$, entonces $A = \bigcup_{j \in J} C_j$ con $C_j \in \beta(H)$ para cada $j \in J$. Dado que $x \in A$, entonces $x \in C_{j_0}$ para algún $j_0 \in J$. Luego se tiene $C_{j_0} = \bigcap_{i=1}^n C_{j_0 i}$ con $C_{j_0 i} \in H$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, y por tanto $x \in C_{j_0 i}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Para cada conjunto $C_{j_0 i}$ existe un elemento $x_{j_0 i} \in X$ tal que $C_{j_0 i} = V_{x_{j_0 i}} = \{y \in X \mid y R x_{j_0 i}\} \cup \{x_{j_0 i}\}$. Ahora es necesario considerar dos casos:

- a) Si $x \in \{y \in X \mid y R x_{j_0 i}\}$ entonces $x R x_{j_0 i}$. Por hipótesis se tiene $y R x$ y como R es transitiva entonces $y R x_{j_0 i}$, y por tanto $y \in C_{j_0 i}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Así se tiene $y \in C_{j_0}$, y por tanto $y \in C_{j_0} \subseteq \bigcup_{j \in J} C_j = A$, es decir, $y \in A$.
- b) Si $x \in \{x_{j_0 i}\}$, entonces evidentemente $x = x_{j_0 i}$ y por tanto $y R x_{j_0 i}$. De la misma manera que en el caso anterior se concluye que $y \in A$.

Finalmente se ha verificado que $A \in \mathcal{C}_R$, y así $\mathcal{T}_R \subseteq \mathcal{C}_R$. □

Corolario 1.18. *Sea X un conjunto dotado de una relación transitiva R . Para las topologías \mathcal{C}_R y \mathcal{T}_R se tiene $\mathcal{T}_R = \mathcal{C}_R$.*

Demostración. Como por la afirmación 1.11 siempre se tiene $\mathcal{C}_R \subseteq \mathcal{T}_R$, en realidad $\mathcal{T}_R \subseteq \mathcal{C}_R$ si y solamente si $\mathcal{T}_R = \mathcal{C}_R$. □

El recíproco no es cierto en general, como se puede evidenciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.19. *Sea $X = \{a, b, c\}$ dotado de la relación:*

$$R = \{(b, c), (c, b)\}.$$

El diagrama de R se puede evidenciar en la figura 1.6.

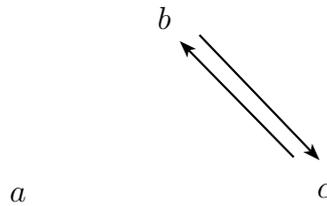


Figura 1.6: Diagrama del ejemplo 1.19

Entonces se tiene:

$$\mathcal{C}_R = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}.$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned} G &= \{\emptyset, \{c\}, \{b\}\}, \\ \beta(G) &= \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, X\}, \\ \mathcal{S}_R &= \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}. \end{aligned}$$

Finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} H &= \{\{a\}, \{b, c\}\}, \\ \beta(H) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}, \\ \mathcal{T}_R &= \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}. \end{aligned}$$

Así en este caso $\mathcal{T}_R = \mathcal{C}_R$, pero R no es transitiva pues $b R c$ y $c R b$, pero no sucede que $b R b$ (y de igual forma, no sucede que $c R c$).

Ahora bien, si R es una relación reflexiva entonces $\mathcal{S}_R = \mathcal{T}_R$ (afirmación 1.12), y si R es una relación transitiva entonces $\mathcal{C}_R = \mathcal{T}_R$ (corolario 1.18). De allí se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 1.20. *Sea X un conjunto dotado de una relación de preorden R (esto es, reflexiva y transitiva). Para las topologías \mathcal{C}_R , \mathcal{S}_R y \mathcal{T}_R se tiene que ellas todas coinciden,*

$$\mathcal{C}_R = \mathcal{S}_R = \mathcal{T}_R.$$

El recíproco no es cierto en general, como se puede evidenciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.21. *Se considera el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros con la relación $<$ del orden usual estricto. Para cada entero x se tiene*

$$U_x = \{n \mid n < x\}$$

y, por otro lado,

$$V_x = \{n \mid n < x\} \cup \{x\} = \{n \mid n \leq x\} = U_{x+1}.$$

Se sigue que $\{U_x\}_{x \in \mathbb{Z}} = \{V_x\}_{x \in \mathbb{Z}}$, es decir, $G = H$ y por tanto $\mathcal{S}_R = \mathcal{T}_R$. Por otro lado, dado que la relación $<$ es transitiva entonces por el corolario 1.18 se tiene $\mathcal{C}_R = \mathcal{T}_R$. De esta manera $\mathcal{C}_R = \mathcal{S}_R = \mathcal{T}_R$ (es decir, \mathcal{C}_R , \mathcal{S}_R y \mathcal{T}_R coinciden), pero $<$ no es una relación reflexiva.

En el caso de una relación de preorden R , la topología común $\mathcal{C}_R = \mathcal{S}_R = \mathcal{T}_R$ es la que tradicionalmente se asocia a conjuntos ordenados (véase [10], [24]), y en la literatura se denomina “topología de colas a izquierda”. Este nombre se debe a que las “colas” V_x se pueden tomar como base de la topología, lo cual se demuestra a continuación.

Afirmación 1.22. *Sea X un conjunto dotado de una relación de preorden R . En este caso $H = \{V_x \mid x \in X\}$ es una base de topología sobre X .*

Nota 1.23. *Dado que la relación R es reflexiva, por la prueba de la afirmación 1.12 se observa que $U_x = V_x$ para cada x , de donde $G = H$. Así, esta afirmación también se puede enunciar de manera equivalente con la base $G = \{U_x \mid x \in X\}$. En cualquier caso, la topología que genera esta base es $\langle H \rangle = \mathcal{T}_R$ que, por los resultados anteriores, en estas circunstancias es igual a \mathcal{S}_R y a \mathcal{C}_R .*

Demostración.

a) Dados $V_x, V_y \in H$ y $z \in V_x \cap V_y$, se tiene $z \in V_z \subseteq V_x \cap V_y$ con $V_z \in H$.

En efecto, por definición es $z \in V_z$. Ahora dado $m \in V_z$ se tiene $m R z$ (no es necesario considerar por aparte el caso $m = z$ porque la relación R es reflexiva) y la hipótesis $z \in V_x \cap V_y$ implica $z R x$ y $z R y$. Como R es una relación transitiva, resulta $m R x$ y $m R y$ de donde $m \in V_x$ y $m \in V_y$, es decir, $m \in V_x \cap V_y$. De esta manera $V_z \subseteq V_x \cap V_y$.

b) $X = \bigcup_{x \in X} V_x$.

Como $V_x \subseteq X$ para cada x , de manera trivial $\bigcup_{x \in X} V_x \subseteq X$. Y como $x \in V_x$ para cada $x \in X$, también de manera trivial $X \subseteq \bigcup_{x \in X} V_x$.

Así se demuestra que H es base. □

1.3. Estudio dual

Ahora se considera un estudio análogo pero realizando las construcciones “hacia la derecha” y no “hacia la izquierda” como se trabajó hasta ahora, probando que se cumplen las mismas propiedades.

1.3.1. Definiciones

Como antes, R es una relación binaria sobre el conjunto X .

Afirmación 1.24. *Dado el conjunto*

$$\mathcal{C}' = \{ S \subseteq X \mid x \in S, x R y \text{ implica } y \in S \}$$

entonces \mathcal{C}' es una topología sobre X .

Definición 1.25. *Sobre X se definen las topologías siguientes:*

$$\mathcal{C}'_R = \{ S \subseteq X \mid x \in S, x R y \text{ implica } y \in S \}$$

$$\mathcal{S}'_R = \langle G' \rangle \text{ donde } G' = \{ U'_x \mid x \in X \} \text{ y } U'_x = \{ y \in X \mid x R y \}$$

$$\mathcal{T}'_R = \langle H' \rangle \text{ donde } H' = \{ V'_x \mid x \in X \} \text{ y } V'_x = U'_x \cup \{ x \}$$

Afirmación 1.26. *La topología \mathcal{C}'_R es una topología de Alexandroff sobre X .*

Ejemplo 1.27. *En general, \mathcal{S}'_R no es una topología de Alexandroff. Sea $X = (0, 1]$ y sea R la relación:*

$$x R y \text{ si y solamente si } x > y.$$

Luego:

$$G' = \{ U'_x \mid x \in X \} \text{ donde } U'_x = (x, 1],$$

$$\beta(G') = G' = \mathcal{S}'_R.$$

Ahora, considérese la familia de abiertos de \mathcal{S}'_R :

$$\left\{ \left(1 - \frac{1}{n}, 1 \right] \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

entonces:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 \right] = \{1\} \notin \mathcal{S}'_R.$$

Por tanto \mathcal{S}'_R no es una topología de Alexandroff.

Ejemplo 1.28. *En general, \mathcal{T}'_R no es una topología de Alexandroff. El ejemplo 1.7 verifica esto, dado que la relación usada allí es simétrica (véase la afirmación 1.45 más adelante).*

1.3.2. Comparación de topologías

Ejemplo 1.29. *Se considera el conjunto $X = \{a, b, c\}$ del ejemplo 1.8 dotado de la misma relación, entonces se tiene:*

$$\mathcal{C}'_R = \{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, X\}.$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned} G' &= \{\{b\}, \{c\}, \emptyset\}, \\ \beta(G') &= \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, X\}, \\ \mathcal{S}'_R &= \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}. \end{aligned}$$

Finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} H' &= \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c\}\}, \\ \beta(H') &= \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}, \\ \mathcal{T}'_R &= \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}. \end{aligned}$$

En este ejemplo se puede evidenciar que, en general, $\mathcal{T}'_R \not\subseteq \mathcal{C}'_R$, $\mathcal{T}'_R \not\subseteq \mathcal{S}'_R$ y $\mathcal{S}'_R \not\subseteq \mathcal{C}'_R$.

Ejemplo 1.30. *Considérese de nuevo el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ del ejemplo 1.9 dotado de la misma relación, entonces se tiene:*

$$\mathcal{C}'_R = \{\emptyset, \{d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, X\}.$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned} G' &= \{\{b, c, d\}, \{d\}, \emptyset\}, \\ \beta(G') &= \{\emptyset, \{d\}, \{b, c, d\}, X\}, \\ \mathcal{S}'_R &= \{\emptyset, \{d\}, \{b, c, d\}, X\}. \end{aligned}$$

Finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} H' &= \{X, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d\}\}, \\ \beta(H') &= \{\emptyset, \{d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, X\}, \\ \mathcal{T}'_R &= \{\emptyset, \{d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, X\}. \end{aligned}$$

En este ejemplo se puede evidenciar que, en general, $\mathcal{C}'_R \not\subseteq \mathcal{S}'_R$.

Ejemplo 1.31. En el conjunto $X = \{a, b, c\}$ del ejemplo 1.10 dotado de la misma relación, se tiene:

$$\mathcal{C}'_R = \{\emptyset, X\}.$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned} G' &= \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}\}, \\ \beta(G') &= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}, \\ \mathcal{S}'_R &= \mathcal{P}(X). \end{aligned}$$

Finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} H' &= \{X\}, \\ \beta(H') &= \{X\}, \\ \mathcal{T}'_R &= \{\emptyset, X\} = \mathcal{C}'_R. \end{aligned}$$

En este ejemplo se puede evidenciar que, en general, $\mathcal{S}'_R \not\subseteq \mathcal{T}'_R$.

Afirmación 1.32. Sea X un conjunto dotado de una relación binaria R . Para las topologías \mathcal{C}'_R y \mathcal{T}'_R se tiene $\mathcal{C}'_R \subseteq \mathcal{T}'_R$.

Las relaciones de contención entre las topologías \mathcal{C}'_R , \mathcal{S}'_R y \mathcal{T}'_R se pueden resumir en la figura 1.7.

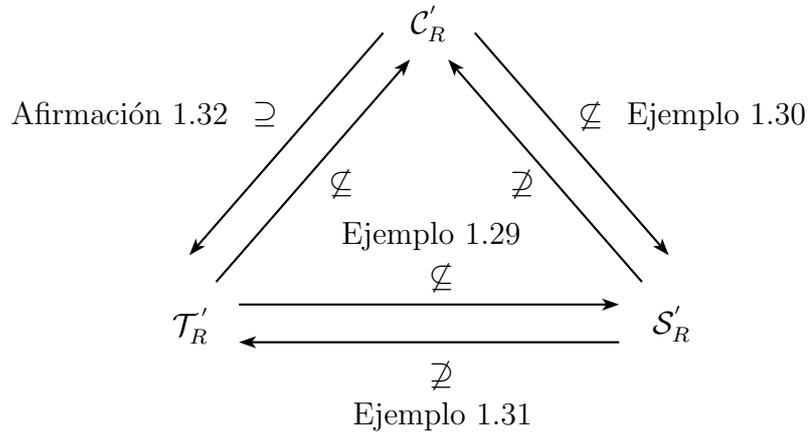


Figura 1.7: Relación entre las topologías \mathcal{C}'_R , \mathcal{S}'_R y \mathcal{T}'_R

1.3.3. Condiciones adicionales

Afirmación 1.33. Sea X un conjunto dotado de una relación reflexiva R . Para las topologías \mathcal{S}'_R y \mathcal{T}'_R descritas en la definición 1.25 se tiene $\mathcal{S}'_R = \mathcal{T}'_R$.

La recíproca no es cierta en general, como se puede evidenciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.34. Considérese el conjunto $X = \{a, b, c\}$ del Ejemplo 1.13 dotado de la misma relación, entonces se tiene:

$$\mathcal{C}'_R = \{\emptyset, X\}.$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned} G' &= \{\{b\}, \{c\}, \{a\}\}, \\ \beta(G') &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, X\}, \\ \mathcal{S}'_R &= \mathcal{P}(X). \end{aligned}$$

Finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} H' &= \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}, \\ \beta(H') &= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}, \\ \mathcal{T}'_R &= \mathcal{P}(X). \end{aligned}$$

Se puede ver que $\mathcal{S}'_R = \mathcal{T}'_R$, pero R no es reflexiva pues no se tiene aRa , bRb ni cRc .

Afirmación 1.35. Sea X un conjunto dotado de una relación transitiva R . Para las topologías \mathcal{C}'_R y \mathcal{S}'_R se tiene $\mathcal{S}'_R \subseteq \mathcal{C}'_R$.

La recíproca de esta afirmación también es cierta, como se puede evidenciar a continuación.

Afirmación 1.36. En un conjunto X dotado de una relación binaria R se consideran las topologías \mathcal{C}'_R y \mathcal{S}'_R . Si $\mathcal{S}'_R \subseteq \mathcal{C}'_R$ entonces R es transitiva.

Lo expuesto anteriormente se puede resumir en el siguiente corolario.

Corolario 1.37. En un conjunto X dotado de una relación binaria R se consideran las topologías \mathcal{C}'_R y \mathcal{S}'_R . Se tiene $\mathcal{S}'_R \subseteq \mathcal{C}'_R$ si y solamente si R es transitiva.

Afirmación 1.38. Sea X un conjunto dotado de una relación transitiva R . Para las topologías \mathcal{C}'_R y \mathcal{T}'_R se tiene $\mathcal{T}'_R \subseteq \mathcal{C}'_R$.

Corolario 1.39. Sea X un conjunto dotado de una relación transitiva R . Para las topologías \mathcal{C}'_R y \mathcal{T}'_R se tiene $\mathcal{T}'_R = \mathcal{C}'_R$.

El recíproco no es cierto en general, como se puede evidenciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.40. Considérese el conjunto $X = \{a, b, c\}$ del ejemplo 1.19 dotado de la misma relación, entonces se tiene:

$$\mathcal{C}'_R = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}.$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned} G' &= \{\emptyset, \{c\}, \{b\}\}, \\ \beta(G') &= \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, X\}, \\ \mathcal{S}'_R &= \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}. \end{aligned}$$

Finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} H' &= \{\{a\}, \{b, c\}\}, \\ \beta(H') &= \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}, \\ \mathcal{T}'_R &= \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}. \end{aligned}$$

Así en este caso $\mathcal{T}'_R = \mathcal{C}'_R$, pero R no es transitiva pues $b R c$ y $c R b$, pero no sucede que $b R b$ (y de igual forma, no sucede que $c R c$).

Ahora bien, si R es una relación reflexiva entonces $\mathcal{S}'_R = \mathcal{T}'_R$ (afirmación 1.33), y si R es una relación transitiva entonces $\mathcal{C}'_R = \mathcal{T}'_R$ (corolario 1.39). De allí se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 1.41. Sea X un conjunto dotado de una relación de preorden R . Para las topologías \mathcal{C}'_R , \mathcal{S}'_R y \mathcal{T}'_R se tiene que ellas todas coinciden, $\mathcal{C}'_R = \mathcal{S}'_R = \mathcal{T}'_R$.

El recíproco no es cierto en general, como se puede evidenciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.42. Se considera el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros con la relación $<$ de orden usual estricto. Para cada entero x se tiene

$$U'_x = \{n \mid x < n\}$$

y, por otro lado,

$$V'_x = \{n \mid x < n\} \cup \{x\} = \{n \mid x \leq n\} = U'_{x-1}.$$

Se sigue que $\{U'_x\}_{x \in \mathbb{Z}} = \{V'_x\}_{x \in \mathbb{Z}}$, es decir, $G' = H'$ y por tanto $\mathcal{S}'_R = \mathcal{T}'_R$. Por otro lado, dado que la relación $<$ es transitiva entonces por el corolario 1.39 se tiene $\mathcal{C}'_R = \mathcal{T}'_R$. De esta manera $\mathcal{C}'_R = \mathcal{S}'_R = \mathcal{T}'_R$ (es decir, \mathcal{C}'_R , \mathcal{S}'_R y \mathcal{T}'_R coinciden), pero $<$ no es una relación reflexiva.

En el caso de una relación de preorden R , la topología común $\mathcal{C}'_R = \mathcal{S}'_R = \mathcal{T}'_R$ es la que tradicionalmente se asocia a conjuntos ordenados (véase [10], [24]), y en la literatura se denomina “topología de colas a derecha”. Este nombre se debe a que las “colas” V'_x se pueden tomar como base de la topología, lo cual se expresa a continuación.

Afirmación 1.43. Sea X un conjunto dotado de una relación de preorden R . En este caso $H' = \{V'_x \mid x \in X\}$ es una base de topología sobre X .

Nota 1.44. Dado que la relación R es reflexiva, se observa que $U'_x = V'_x$ para cada x , de donde $G' = H'$. Así, esta afirmación también se puede enunciar de manera equivalente con la base $G' = \{U'_x \mid x \in X\}$. La topología que genera esta base es $\langle H' \rangle = \mathcal{T}'_R$ que, por los resultados anteriores, en estas circunstancias es igual a \mathcal{S}'_R y a \mathcal{C}'_R .

1.3.4. Igualdad de topologías

Afirmación 1.45. Sea X un conjunto dotado de una relación simétrica R . Para las topologías \mathcal{C}_R , \mathcal{C}'_R , \mathcal{S}_R , \mathcal{S}'_R , \mathcal{T}_R y \mathcal{T}'_R descritas en las definiciones 1.3 y 1.25 se tiene:

- $\mathcal{C}_R = \mathcal{C}'_R$,
- $\mathcal{S}_R = \mathcal{S}'_R$,
- $\mathcal{T}_R = \mathcal{T}'_R$.

Es decir, en este caso las topologías “a la derecha” y “a la izquierda” coinciden.

Demostración. Como la relación R es simétrica se tiene $x R y$ si y solo si $y R x$. En primer lugar, esto implica que las condiciones que definen las topologías \mathcal{C}_R y \mathcal{C}'_R son la misma, de donde $\mathcal{C}'_R = \mathcal{C}_R$. Por otro lado, para cada $x \in X$ se tiene $U'_x = U_x$ de donde $G' = G$ y $\mathcal{S}'_R = \mathcal{S}_R$. Por fin, también $V'_x = U'_x \cup \{x\} = U_x \cup \{x\} = V_x$, de donde $H' = H$ y $\mathcal{T}'_R = \mathcal{T}_R$. \square

Por la afirmación anterior y los corolarios 1.20 y 1.41 se obtiene el resultado siguiente.

Corolario 1.46. *Sea X un conjunto dotado de una relación de equivalencia R (reflexiva, simétrica y transitiva). Para las topologías \mathcal{C}_R , \mathcal{C}'_R , \mathcal{S}_R , \mathcal{S}'_R , \mathcal{T}_R y \mathcal{T}'_R se tiene que ellas todas coinciden.*

1.4. Una equivalencia de categorías

En la construcción de las secciones anteriores se vieron involucradas varias estructuras como los espacios topológicos y las relaciones en conjuntos, entre las cuales se destacan los espacios topológicos de Alexandroff y las relaciones de preorden. Como es bien sabido en teoría de categorías, estas estructuras determinan sendas categorías y la construcción corresponde a un funtor.

1.4.1. Categorías concretas

La construcción se realizará en el contexto de las categorías concretas, para lo cual se adopta la terminología de Adámek (véase [1]). Las definiciones básicas de la teoría de categorías se asumen conocidas (para mayores detalles véase [16]).

Ejemplo 1.47. *Algunos ejemplos de categorías que serán de utilidad son los siguientes:*

- **Con:** *Tiene como objetos los conjuntos, los morfismos son las funciones y la composición es la usual entre conjuntos.*
- **Ab(X):** *Dado un espacio topológico X , la categoría $\mathbf{Ab}(X)$ tiene como objetos los abiertos de X y los morfismos son las inclusiones entre conjuntos, es decir, existe un morfismo $U \rightarrow V$ si y solo si $U \subseteq V$.*

- **Top**: Tiene como objetos los espacios topológicos, los morfismos son las funciones continuas y la composición es la usual entre funciones.
- **Fib(X)**: Dado un espacio topológico fijo X , la categoría **Fib(X)** tiene como objetos los pares (Y, f) , llamados fibrados sobre X , donde Y es un espacio topológico y $f : Y \rightarrow X$ es una función continua. Un morfismo $h : (Y, f) \rightarrow (W, g)$ es una función continua $h : Y \rightarrow W$ tal que $gh = f$. En la teoría de categorías esto se expresa diciendo que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{h} & W \\
 & \searrow f & \swarrow g \\
 & & X
 \end{array}$$

- **Rel**: Tiene como objetos todos los pares (X, R) , donde X es un conjunto y R es una relación binaria en X . Un morfismo $f : (X, R) \rightarrow (Y, S)$ es un morfismo de relaciones, es decir, una función $f : X \rightarrow Y$ tal que si $x R x'$ para $x, x' \in X$ entonces $f(x) S f(x')$.
- **C^{op}**: Si \mathcal{C} es una categoría arbitraria, su categoría dual \mathcal{C}^{op} tiene los mismos objetos pero los morfismos tienen dirección opuesta. De esta manera si $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ son \mathcal{C} -morfismos entonces $f^{op} : B \rightarrow A$ y $g^{op} : C \rightarrow B$ son \mathcal{C}^{op} -morfismos, y $f^{op}g^{op} : C \rightarrow A$ se define por $f^{op}g^{op} = (gf)^{op}$.
- Dadas categorías fijas \mathcal{C} y \mathcal{D} se define la categoría $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ que tiene como objetos los funtores de \mathcal{C} a \mathcal{D} y como morfismos las transformaciones naturales entre dichos funtores. En particular a la categoría **Con** ^{\mathcal{C}^{op}} se le llama categoría de prehaces sobre la categoría \mathcal{C} , y cuando $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}(X)$ entonces **Con** ^{$\mathbf{Ab}(X)^{op}$} se le denomina categoría de prehaces sobre el espacio topológico X .

Como es bien sabido de teoría de categorías, un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es una función entre categorías, entre los cuales se destacará el siguiente.

Definición 1.48. Sea \mathcal{C} una categoría cuyos objetos son conjuntos con alguna estructura (algebraica, topológica, de orden, etc.) y cuyos morfismos son funciones que

respetan dicha estructura. El funtor olvido F asigna a cada \mathcal{C} -objeto C el conjunto C olvidándose de su estructura, y a cada \mathcal{C} -morfismo f la función conjuntista subyacente f . En general, si \mathcal{C} es una categoría y \mathcal{B} es una categoría de \mathcal{C} -objetos con estructura entonces el funtor olvido $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ es el funtor que olvida la estructura de \mathcal{B} .

Definición 1.49. Sea \mathcal{C} una categoría. Una categoría concreta sobre \mathcal{C} es un par (\mathcal{A}, U) , donde \mathcal{A} es una categoría y $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ es el funtor olvido.

Ejemplo 1.50. Las categorías **Rel** y **Top** son categorías concretas sobre **Con**.

Definición 1.51. Sea (\mathcal{A}, U) una categoría concreta sobre \mathcal{C} . La fibra de un \mathcal{C} -objeto X es la clase de todos los \mathcal{A} -objetos M tales que $U(M) = X$. En la fibra se considera la siguiente relación.

$$M \leq N \quad \text{si existe un morfismo } f : M \rightarrow N \text{ con } Uf = id_X.$$

Afirmación 1.52. \leq es una relación de preorden.

Definición 1.53. Si $(\mathcal{A}, U), (\mathcal{B}, V)$ son categorías concretas sobre \mathcal{C} , entonces un funtor concreto de (\mathcal{A}, U) en (\mathcal{B}, V) es un funtor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ con $U = VF$. Tal funtor se denota $F : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$.

Definición 1.54. Sean F, G funtores concretos de (\mathcal{A}, U) en (\mathcal{B}, V) , entonces F es más fino que G , lo cual se denota $F \leq G$, siempre que $F(M) \leq G(M)$ para cada \mathcal{A} -objeto M .

Definición 1.55. Si $(\mathcal{A}, U), (\mathcal{B}, V)$ son categorías concretas sobre una categoría \mathcal{C} y $F, G : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$ son funtores concretos, entonces una transformación natural $\lambda : F \rightarrow G$ es concreta siempre que $V\lambda_M = id_{U(M)}$ para cada \mathcal{A} -objeto M .

Nota 1.56. En adelante, por simplicidad una categoría concreta (\mathcal{A}, U) sobre \mathcal{C} se denota \mathcal{A} .

Afirmación 1.57. Si $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ son funtores concretos entonces: $F \leq G$ si y solamente si existe una única transformación natural concreta $\lambda : F \rightarrow G$.

Definición 1.58. Sean \mathcal{A}, \mathcal{B} categorías concretas sobre la categoría \mathcal{C} . Si $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ son funtores concretos entonces el par (F, G) es una correspondencia de Galois (entre \mathcal{A} y \mathcal{B} sobre \mathcal{C}) siempre que $FG \leq id_{\mathcal{A}}$ e $id_{\mathcal{B}} \leq GF$.

Afirmación 1.59. Sean \mathcal{A} , \mathcal{B} categorías concretas sobre \mathcal{C} . Si $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ son funtores concretos entonces (F, G) es una correspondencia de Galois si y solamente si existen transformaciones naturales concretas η y ϵ para las cuales $(\eta, \epsilon) : F \dashv G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ son funtores adjuntos.

1.4.2. Construcción de funtores

Una de las topologías consideradas en la primera sección da lugar a un funtor.

Afirmación 1.60. Si $f : (X, R) \rightarrow (Y, S)$ es un morfismo de relaciones entonces

$$f : (X, \mathcal{C}_R) \rightarrow (Y, \mathcal{C}_S)$$

es una función continua.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{C}_S$ un abierto, lo cual significa que

$$b \in U, a R b \text{ implica } a \in U$$

para cada $a, b \in Y$. Ahora se considera la imagen recíproca de U , sean $y \in f^{-1}(U)$ y $x \in X$ tales que $x R y$. Entonces $f(y) \in U$ y, como f es un morfismo de relaciones, $f(x) S f(y)$ lo cual implica $f(x) \in U$ porque $U \in \mathcal{C}_S$, así que $x \in f^{-1}(U)$. Como se ha mostrado que

$$y \in f^{-1}(U), x R y \text{ implica } x \in f^{-1}(U)$$

para cada $x, y \in X$, entonces $f^{-1}(U) \in \mathcal{C}_R$, es decir, $f^{-1}(U)$ es un abierto luego f es una función continua. \square

Así resulta que \mathcal{C} es un funtor de la categoría de los conjuntos dotados de una relación binaria en la categoría de espacios topológicos. Más aún, se tiene lo siguiente.

Corolario 1.61. La correspondencia $\mathcal{C} : \mathbf{Rel} \rightarrow \mathbf{Top}$ definida como:

- i) A cada conjunto (X, R) dotado de una relación binaria R se asigna el espacio topológico (X, \mathcal{C}_R)
- ii) A cada morfismo de relaciones $f : (X, R) \rightarrow (Y, S)$ se asigna la función continua $f : (X, \mathcal{C}_R) \rightarrow (Y, \mathcal{C}_S)$

es un funtor concreto.

Ahora es necesario desarrollar un camino en el sentido inverso, desde los espacios topológicos hacia los conjuntos con una relación.

Afirmación 1.62. Sea (X, τ) un espacio topológico. Para $x, y \in X$ son equivalentes:

$$i) y \in \overline{\{x\}};$$

$$ii) y \in A \text{ implica } x \in A \text{ para cada abierto } A \text{ de } X.$$

Demostración. En realidad, basta observar que para cualquier subconjunto S se tiene $S \cap \{y\} \neq \emptyset$ si y solo si $y \in S$. Sin embargo, con sumo detalle:

(i) \Rightarrow (ii). Si $A \in \tau$ es abierto y $y \in A$ entonces $y \in \overline{\{x\}}$ implica $A \cap \{x\} \neq \emptyset$, es decir, $x \in A$.

(ii) \Rightarrow (i). Sea $B \in \tau$ un abierto arbitrario tal que $y \in B$. Por hipótesis esto implica $x \in B$, es decir, $B \cap \{x\} \neq \emptyset$. Así $y \in \overline{\{x\}}$. \square

Afirmación 1.63. Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)$ una función continua entre espacios topológicos y sean $x, y \in X$.

$$\text{Si } y \in \overline{\{x\}} \text{ entonces } f(y) \in \overline{\{f(x)\}}.$$

Demostración. Sea $V \in \mu$ un abierto de Y tal que $f(y) \in V$. Entonces $f^{-1}(V) \in \tau$ es abierto en X porque f es continua. Como $y \in \overline{\{x\}}$, de $y \in f^{-1}(V)$ se sigue $x \in f^{-1}(V)$, es decir, $f(x) \in V$.

Puesto que $f(y) \in V$ implica $f(x) \in V$, se concluye que $f(y) \in \overline{\{f(x)\}}$. \square

De esta manera, si en cada espacio topológico (X, τ) se define la relación binaria E_τ como: $a E_\tau b$ si $b \in \overline{\{a\}}$ (esto es, si y solo si $b \in A$ implica $a \in A$ para cada abierto $A \in \tau$), entonces para cualquier función continua $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)$ se concluye:

$$a E_\tau b \text{ implica } f(a) E_\mu f(b)$$

para cada $a, b \in X$, verificando así que f es un morfismo de relaciones.

Afirmación 1.64. Si $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \mu)$ es una función continua, entonces la misma función $f : (X, E_\tau) \longrightarrow (Y, E_\mu)$ es un morfismo de relaciones.

Así se obtiene un funtor E de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los conjuntos dotados de una relación binaria.

Corolario 1.65. La correspondencia $E : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Rel}$ definida como:

- i) A cada espacio topológico (X, τ) se asigna el conjunto (X, E_τ) dotado de una relación binaria E_τ
- ii) A cada función continua $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \mu)$ se asigna el morfismo de relaciones $f : (X, E_\tau) \longrightarrow (Y, E_\mu)$

es un funtor concreto.

Nota 1.66. Dado un espacio topológico (X, τ) , la relación E_τ definida anteriormente en algunos contextos se conoce como el preorden de especialización y siempre es una relación de preorden. Cabe resaltar que numerosos autores describen el preorden de especialización en un sentido dual, es decir, la relación binaria E'_τ como: $a E'_\tau b$ si $a \in \overline{\{b\}}$. Teniendo en cuenta el teorema 1.63, se sigue cumpliendo que:

$$a E'_\tau b \text{ implica } f(a) E'_\mu f(b).$$

Se puede verificar que E_τ y E'_τ gozan de las mismas propiedades (en un sentido dual), y por tanto es irrelevante cuál de las dos se escoge. Por cuestiones de redacción del documento y del objetivo del mismo, se trabajará con la relación E_τ .

1.4.3. Adjunción

Afirmación 1.67. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función, R una relación en X y μ una topología en Y . Son equivalentes:

- i) $f : (X, R) \longrightarrow (Y, E_\mu)$ es un morfismo de relaciones
- ii) $f : (X, \mathcal{C}_R) \longrightarrow (Y, \mu)$ es una función continua

Demostración.

(i) \Rightarrow (ii). Sea $U \in \mu$ un abierto de Y y sea $b \in f^{-1}(U)$, es decir, $f(b) \in U$. Por hipótesis se tiene:

$$a R b \text{ implica } f(a) E_\mu f(b)$$

para $a, b \in X$. Sea $a \in X$ tal que $a R b$, entonces $f(a) E_\mu f(b)$ y así $f(b) \in \overline{\{f(a)\}}$. Por el teorema 1.62 se tiene $f(a) \in U$, y así $a \in f^{-1}(U)$. Como se mostró que:

$$b \in f^{-1}(U), a R b \text{ implica } a \in f^{-1}(U)$$

entonces se tiene $f^{-1}(U) \in \mathcal{C}_R$, de manera que f es una función continua.

(ii) \Rightarrow (i). Sean $x, y \in X$ tales que $x R y$ y sea $V \in \mu$ con $f(y) \in V$, de manera que $y \in f^{-1}(V)$. Como f es una función continua, entonces $f^{-1}(V) \in \mathcal{C}_R$. Dado que $y \in f^{-1}(V)$ y $x R y$ entonces $x \in f^{-1}(V)$, de donde se sigue que $f(x) \in V$. Luego, se ha mostrado que $f(y) \in V$ implica que $f(x) \in V$, y así $f(y) \in \overline{\{f(x)\}}$, es decir, $f(x) E_\mu f(y)$. Por tanto f es un morfismo de relaciones. \square

A partir de la afirmación anterior se mostrará que entre las categorías **Top** y **Rel** existe una adjunción. Sea τ una topología arbitraria sobre un conjunto Y , entonces

$$id_Y : (Y, E_\tau) \longrightarrow (Y, E_\tau)$$

es un morfismo de relaciones. Por la afirmación 1.67 se tiene que

$$id_Y : (Y, \mathcal{C}_{E_\tau}) \longrightarrow (Y, \tau)$$

es una función continua, de donde:

$$\mathcal{C}_{E_\tau} \leq \tau.$$

Como esto se cumple para cualquier espacio topológico (Y, τ) , a nivel de funtores se concluye:

$$\mathcal{C}E \leq id_{\mathcal{T}op}.$$

Cabe resaltar que, como conjuntos, se tiene la contención $\tau \subseteq \mathcal{C}_{E_\tau}$.

Por otro lado, sea R una relación arbitraria sobre un conjunto X , entonces

$$id_X : (X, \mathcal{C}_R) \longrightarrow (X, \mathcal{C}_R)$$

es una función continua. Por la afirmación 1.67 se tiene que

$$id_X : (X, R) \longrightarrow (X, E_{C_R})$$

es un morfismo de relaciones, de donde:

$$R \leq E_{C_R}.$$

Como esto se cumple para cualquier conjunto (X, R) dotado de una relación binaria R , a nivel de funtores se concluye:

$$id_{\mathcal{R}el} \leq EC.$$

Ahora, dado que los funtores $\mathcal{C} : \mathcal{R}el \longrightarrow \mathcal{T}op$ y $E : \mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{R}el$ verifican

$$CE \leq id_{\mathcal{T}op} \qquad id_{\mathcal{R}el} \leq EC$$

entonces (\mathcal{C}, E) es una correspondencia de Galois. Finalmente, por la afirmación 1.59 existen transformaciones naturales concretas η y ϵ para los cuales $(\eta, \epsilon) : \mathcal{C} \dashv E : \mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{R}el$ son funtores adjuntos.

Teorema 1.68. *Los funtores concretos $\mathcal{C} : \mathcal{R}el \longrightarrow \mathcal{T}op$ y $E : \mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{R}el$ constituyen un par adjunto.*

Como es conocido en teoría de categorías, toda adjunción se restringe a una equivalencia de categorías entre las imágenes, que coinciden con los puntos fijos bajo los funtores compuestos.

Afirmación 1.69. *Para una relación binaria R las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) R es una relación de preorden*
- ii) $R = E_\tau$ para alguna topología τ*
- iii) $R = E_{C_R}$*

Demostración.

(i) \Rightarrow (iii). Siempre se tiene $R \subseteq E_{C_R}$. En el otro sentido, supóngase que $x(E_{C_R})$ y y considérese el conjunto $A = \{z \mid z R y\} = U_y$. Como R es transitiva, por la afirmación

1.14 este conjunto A es un abierto de \mathcal{C}_R ; como R es reflexiva, $y \in A$. Por la definición de $E_{\mathcal{C}_R}$ se sigue $x \in A$, es decir, $x R y$. Así, $E_{\mathcal{C}_R} \subseteq R$ y se concluye la igualdad.

(iii) \Rightarrow (ii). Basta tomar $\tau = \mathcal{C}_R$.

(ii) \Rightarrow (i). Toda relación de especialización es de preorden. \square

Por tanto, se puede evidenciar que los objetos de la categoría **Rel** que quedan invariantes bajo el funtor compuesto EC son precisamente las relaciones de preorden.

Afirmación 1.70. *Sea τ una topología arbitraria sobre X . Todo abierto de \mathcal{C}_{E_τ} es intersección de abiertos de τ .*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{C}_{E_\tau}$. Dados $x \notin U$, $y \in U$ se tiene $x \not E_\tau y$, es decir, $y \notin \overline{\{x\}}$ luego existe un abierto $A_{xy} \in \tau$ con $y \in A_{xy}$, $x \notin A_{xy}$. Para cada $x \notin U$ fijo sea $B_x = \bigcup_{y \in U} A_{xy}$. Se nota que $B_x \in \tau$ es abierto, que $x \notin B_x$ y que $U \subseteq B_x$. En consecuencia $U \subseteq \bigcap_{x \notin U} B_x$. Pero en realidad esto es una igualdad, pues si $z \notin U$ entonces $z \notin B_z$ luego $z \notin \bigcap_{x \notin U} B_x$. En conclusión, $U = \bigcap_{x \notin U} B_x$ con $B_x \in \tau$. \square

Afirmación 1.71. *Para una topología τ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) τ es una topología de Alexandroff

ii) $\tau = \mathcal{C}_R$ para alguna relación R

iii) $\tau = \mathcal{C}_{E_\tau}$

Demostración.

(i) \Rightarrow (iii). Siempre $\tau \subseteq \mathcal{C}_{E_\tau}$. En el otro sentido, por la afirmación 1.70 todo abierto de \mathcal{C}_{E_τ} es intersección de abiertos de τ . Como τ es una topología de Alexandroff, esta intersección pertenece a τ . Así $\mathcal{C}_{E_\tau} \subseteq \tau$ y se concluye la igualdad.

(iii) \Rightarrow (ii). Basta tomar $R = E_\tau$.

(ii) \Rightarrow (i). Por la afirmación 1.5, toda topología \mathcal{C}_R es de Alexandroff. \square

Por tanto, se puede evidenciar que los objetos de la categoría **Top** que quedan invariantes bajo el funtor compuesto CE son precisamente las topologías de Alexandroff.

Teorema 1.72. *Existe una equivalencia entre la categoría de los espacios de Alexandroff y la categoría de las relaciones de preorden.*

Demostración. Es consecuencia del teorema 1.68 y las caracterizaciones anteriores de los puntos fijos bajo los funtores compuestos. \square

La correspondencia biyectiva entre espacios de Alexandroff y relaciones de preorden se atribuye a P. Alexandroff. En la literatura se encuentran otras pruebas de esta equivalencia de categorías, pero algunas de ellas mucho más complicadas y largas que la anterior (véase por ejemplo [7]).

Capítulo 2

Haces para modelos de Kripke “modales”

Los modelos de Kripke son estructuras que fueron introducidas por Saul Kripke como semántica para la lógica modal. Luego fueron adaptados como una semántica para la lógica intuicionista, así que se puede hablar de modelos de Kripke “modales” y modelos “intuicionistas”. Cualquier modelo de Kripke “intuicionista” se puede ver de manera natural como un haz [10]. En este capítulo se propone una forma de asociar un haz a un modelo de Kripke “modal”.

Los conceptos básicos de la lógica modal pueden ser consultados en [11], [12] y [13], mientras los elementos de la teoría de haces se pueden encontrar en [17] y [25]. En las secciones que siguen se presentan algunas nociones mínimas de estos temas y se fija la terminología empleada en el resto del documento.

2.1. Modelos de Kripke para la lógica modal

La lógica modal puede verse como una extensión de la lógica clásica que incluye operadores de modalidad, en especial los operadores de necesidad y posibilidad. Si α es una fórmula lógica entonces se definen las siguientes fórmulas.

$\Box\alpha$	“necesariamente α ”
$\Diamond\alpha$	“posiblemente α ”

Estos operadores se pueden definir cada uno en términos del otro mediante las equivalencias que se muestran a continuación, aquí \neg denota la negación.

$$\diamond\alpha \leftrightarrow \neg\Box\neg\alpha \qquad \Box\alpha \leftrightarrow \neg\diamond\neg\alpha$$

Los operadores modales se rigen por una gran cantidad de axiomas que han adquirido nomenclatura en la tradición matemática, se dan algunos ejemplos.

$$\mathbf{K.} \quad \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$$

$$\mathbf{T.} \quad \Box\alpha \rightarrow \alpha$$

$$\mathbf{4.} \quad \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$$

$$\mathbf{B.} \quad \alpha \rightarrow \Box\diamond\alpha$$

$$\mathbf{5.} \quad \diamond\alpha \rightarrow \Box\diamond\alpha$$

$$\mathbf{G.} \quad \diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\diamond\alpha$$

Según los axiomas que se adopten para estos operadores se obtienen muchas lógicas modales. En general se toman todos los axiomas de la lógica clásica (abreviados **LC**) y se añaden algunos de los anteriores, o axiomas similares a ellos. Las siguientes combinaciones determinan las lógicas modales más conocidas.

$$N. \quad \mathbf{LC} + \mathbf{K}$$

$$B. \quad \mathbf{LC} + \mathbf{K} + \mathbf{T} + \mathbf{B}$$

$$S_4. \quad \mathbf{LC} + \mathbf{K} + \mathbf{T} + \mathbf{4}$$

$$S_{4.2}. \quad \mathbf{LC} + \mathbf{K} + \mathbf{T} + \mathbf{4} + \mathbf{G}$$

$$S_5. \quad \mathbf{LC} + \mathbf{K} + \mathbf{T} + \mathbf{4} + \mathbf{B}, \text{ o bien, } \mathbf{LC} + \mathbf{K} + \mathbf{T} + \mathbf{5}$$

Aparte de los axiomas se adopta la regla de inferencia usual en la lógica clásica conocida como *modus ponens*, además de la *regla de necesidad* que establece que toda tautología es necesaria.

Los axiomas y las reglas determinan la sintaxis de las lógicas modales. Respecto a la semántica de las mismas, la más conocida está dada por los ya mencionados modelos de Kripke que en alguna medida formalizan la idea de los mundos posibles de Leibniz.

Definición 2.1. Un marco modal es una pareja $\mu = (X, R)$, donde X es un conjunto llamado universo y cuyos elementos $x \in X$ se denominan mundos, mientras R es una relación binaria en X llamada relación de accesibilidad entre los mundos del marco.

Se nota que no existe restricción alguna sobre el conjunto X ni sobre la relación R . Cuando se tiene $x R y$ entonces se dice que el mundo y es *accesible* desde el mundo x .

De manera informal, la semántica de Kripke permite interpretar los operadores modales de la siguiente manera.

- La fórmula α es necesaria en un mundo si es verdadera en *todos* los mundos accesibles desde él.
En otras palabras, $\Box\alpha$ es válida en x si α es válida en todo y con $x R y$.
- La fórmula α es posible en un mundo si es verdadera en *algún* mundo accesible desde él.
En otras palabras, $\Diamond\alpha$ es válida en x si α es válida en algún y con $x R y$.

De esta manera, para poder formalizar la lógica solo se requiere precisar la noción de “verdad” o “validez” en un mundo. Esto se hace como en la lógica clásica, mediante una valuación que especifica cuáles proposiciones son verdaderas y cuáles falsas.

Definición 2.2. Un modelo de Kripke es una pareja $\kappa = (\mu, v)$, donde $\mu = (X, R)$ es un marco modal mientras v es una valuación que para cada $x \in X$ consiste en una función $v_x : \mathcal{L} \rightarrow \{V, F\}$ siendo \mathcal{L} el conjunto de letras proposicionales.

De forma alternativa, la función v está determinada de manera única por la función siguiente.

$$v : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P}(X) : p \mapsto \{x \in X \mid v_x(p) = V\}$$

Ahora en cada mundo x , la valuación “local” v_x se extiende a todas las fórmulas proposicionales de la manera usual en la lógica proposicional (véase [9]), dando lugar a la función extendida \bar{v}_x . A continuación se incluye en esa definición las fórmulas modales, dando rigor a las ideas expresadas arriba.

Definición 2.3. Sea $\kappa = (\mu, v)$ un modelo de Kripke. Para cada letra $p \in \mathcal{L}$, cada par de fórmulas α, β y cada mundo $x \in X$ se define:

- $\bar{v}_x[p] = V$ si $v_x(p) = V$
- $\bar{v}_x[\neg\alpha] = V$ si $\bar{v}_x[\alpha] = F$
- $\bar{v}_x[\alpha \wedge \beta] = V$ si $\bar{v}_x[\alpha] = V$ y $\bar{v}_x[\beta] = V$
- $\bar{v}_x[\alpha \vee \beta] = V$ si $\bar{v}_x[\alpha] = V$ o $\bar{v}_x[\beta] = V$
- $\bar{v}_x[\alpha \rightarrow \beta] = V$ si $\bar{v}_x[\alpha] = V$ implica $\bar{v}_x[\beta] = V$
- $\bar{v}_x[\Box\alpha] = V$ si para cada $y \in X$ con $x R y$ se tiene $\bar{v}_y[\alpha] = V$
- $\bar{v}_x[\Diamond\alpha] = V$ si para algún $y \in X$ con $x R y$ se tiene $\bar{v}_y[\alpha] = V$

En este punto es conveniente introducir la notación más usual para la semántica.

Definición 2.4. Sea $\kappa = (\mu, v)$ un modelo de Kripke. Una fórmula α es válida en un mundo $x \in X$ si $\bar{v}_x[\alpha] = V$, lo cual se denota

$$\kappa \models_x \alpha.$$

En estos términos la definición 2.3 se traduce de la siguiente manera.

- $\kappa \models_x p$ si y solo si $v_x(p) = V$
- $\kappa \models_x \neg\alpha$ si y solo si $\kappa \not\models_x \alpha$
- $\kappa \models_x \alpha \wedge \beta$ si y solo si $\kappa \models_x \alpha$ y $\kappa \models_x \beta$
- $\kappa \models_x \alpha \vee \beta$ si y solo si $\kappa \models_x \alpha$ o $\kappa \models_x \beta$
- $\kappa \models_x \alpha \rightarrow \beta$ si y solo si $\kappa \models_x \alpha$ implica $\kappa \models_x \beta$
- $\kappa \models_x \Box\alpha$ si y solo si $\kappa \models_y \alpha$ para cada y con $x R y$
- $\kappa \models_x \Diamond\alpha$ si y solo si $\kappa \models_y \alpha$ para algún y con $x R y$

La validez de ciertas fórmulas en los modelos de Kripke está vinculada estrechamente con las propiedades de la relación de accesibilidad entre los mundos posibles. Las pruebas detalladas de los hechos siguientes se pueden encontrar en [13] y [15].

Afirmación 2.5. *Un marco modal es reflexivo si y sólo si para todo modelo de Kripke sobre él y cualquier valuación la fórmula $\mathbf{T}: \Box p \rightarrow p$ es válida en cada mundo (o de forma equivalente, si la fórmula $p \rightarrow \Diamond p$ es válida en cada mundo).*

Afirmación 2.6. *Un marco modal es simétrico si y sólo si para todo modelo de Kripke sobre él y cualquier valuación la fórmula $\mathbf{B}: p \rightarrow \Box \Diamond p$ es válida en cada mundo (o de forma equivalente, si la fórmula $\Diamond \Box p \rightarrow p$ es válida en cada mundo).*

Afirmación 2.7. *Un marco modal es transitivo si y sólo si para todo modelo de Kripke sobre él y cualquier valuación la fórmula $\mathbf{4}: \Box p \rightarrow \Box \Box p$ es válida en cada mundo (o de forma equivalente, si la fórmula $\Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$ es válida en cada mundo).*

Una relación binaria R es *convergente* si para elementos x, y, z tales que $x R y$ y $x R z$ existe un elemento u tal que $y R u$ y $z R u$. Por ejemplo, es evidente que toda relación simétrica es convergente, pero no al revés.

Afirmación 2.8. *Un marco modal es convergente si y sólo si para todo modelo de Kripke sobre él y cualquier valuación la fórmula $\mathbf{G}: \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$ es válida en cada mundo.*

Esto sugiere que algunas lógicas modales corresponden a marcos dados por relaciones de cierto tipo. Las conclusiones siguientes también se pueden demostrar con rigor.

Teorema 2.9. *Sea φ cualquier fórmula modal.*

1. φ es deducible en la lógica S_4 si y solo si es válida en todos los modelos de Kripke sobre una relación reflexiva y transitiva, es decir, de preorden;
2. φ es deducible en la lógica $S_{4.2}$ si y solo si es válida en todos los modelos de Kripke sobre una relación reflexiva, transitiva y convergente;
3. φ es deducible en la lógica S_5 si y solo si es válida en todos los modelos de Kripke sobre una relación reflexiva, simétrica y transitiva, es decir, de equivalencia.

A continuación se muestran algunos ejemplos que ilustran las afirmaciones enunciadas.

Ejemplo 2.10. *Considérese el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ dotado de la relación:*

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e)\}.$$

La figura 2.1 muestra la relación R mediante un diagrama. Esta relación se puede obtener considerando cinco números naturales con el orden usual estricto no transitivo.

Sobre el marco modal $\mu = (X, R)$ se considera el modelo de Kripke $\kappa = (\mu, v)$ donde v está dada por:

$$v(p) = \{b, c\}, \quad v(q) = \{a, b, c, d, e\}.$$

Como se indicó, aquí $v(p)$ indica que p es verdadera en b y en c , o de manera equivalente:

$$v_a(p) = F, \quad v_b(p) = V, \quad v_c(p) = V, \quad v_d(p) = F, \quad v_e(p) = F.$$

De forma análoga, es $v_x(q) = V$ para cada $x \in X$.

Ahora se observan los hechos siguientes.

- ♣) Para el elemento $a \in X$, si se consideran todos los elementos $y \in X$ tales que $a R y$ se observa que solo se trata de un elemento, que es b . Puesto que $\bar{v}_b[p] = V$, se tiene $\bar{v}_y[p] = V$ para cada $y \in X$ con $a R y$, y en consecuencia $\bar{v}_a[\Box p] = V$, es decir:

$$\kappa \models_a \Box p.$$

De forma similar se tiene $\kappa \models_b \Box p$, mientras $\kappa \not\models_c \Box p$ (pues $c R d$ con $\bar{v}_d[p] = F$), $\kappa \not\models_d \Box p$ y por fin $\kappa \models_e \Box p$ (de manera trivial).

- ♣) Puesto que $\kappa \not\models_a p$, de lo anterior se concluye que:

$$\kappa \not\models_a \Box p \rightarrow p,$$

lo cual es consistente con la afirmación 2.5 pues la relación R no es reflexiva.

- ♣) Ya que existe $y \in X$ con $a R y$ tal que $\kappa \models_y \Box p$ (de hecho, la única posibilidad es el elemento b y para este sí es válida la fórmula), se tiene:

$$\kappa \models_a \Diamond \Box p.$$

De nuevo, como $\kappa \not\models_a p$ se concluye que:

$$\kappa \not\models_a \Diamond \Box p \rightarrow p,$$

lo cual es consistente con la afirmación 2.6 pues la relación R no es simétrica.

♣) Puesto que $b R c$ y $\kappa \not\models_c \Box p$, se tiene $\kappa \not\models_b \Box \Box p$. En consecuencia

$$\kappa \not\models_b \Box p \rightarrow \Box \Box p,$$

lo cual es consistente con la afirmación 2.7 pues la relación R no es transitiva.

♣) De forma análoga se puede ver que $\kappa \models_x \Box q$ para cada $x \in X$.

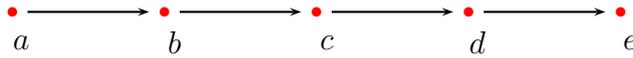


Figura 2.1: Diagrama del ejemplo 2.10

Ejemplo 2.11. Considérese el conjunto $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ con la relación R dada por el diagrama de la figura 2.2. Esta relación se puede obtener considerando los divisores positivos de 24 con la divisibilidad estricta.

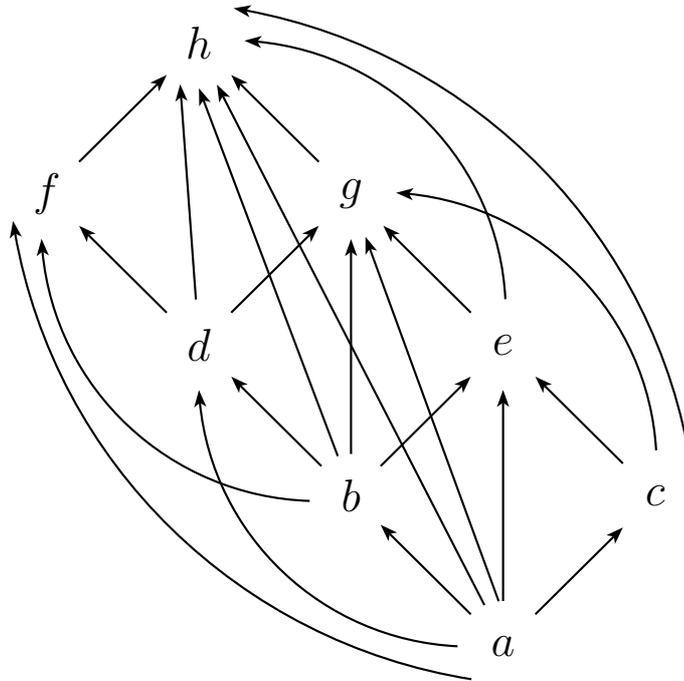


Figura 2.2: Diagrama del ejemplo 2.11

Sobre el marco modal $\mu = (X, R)$ se considera el modelo de Kripke $\kappa = (\mu, v)$ donde v está dada por:

$$v(p) = \{d, f, g, h\}, \quad v(q) = \{e\}.$$

En este modelo se observan los hechos siguientes.

- ♣) Como $\bar{v}_y[p] = V$ para cada $y \in X$ con eRy , se tiene $\bar{v}_e[\Box p] = V$; pero como $\bar{v}_e[p] = F$ se concluye:

$$\kappa \not\vdash_e \Box p \rightarrow p.$$

Esto es consistente con la afirmación 2.5 pues la relación R no es reflexiva.

- ♣) Puesto que no existe elemento alguno $y \in X$ con hRy , de manera trivial $\kappa \not\vdash_h \Diamond p$. Ahora para cada $x \in X$ con $x \neq h$ se tiene xRh y $\kappa \not\vdash_h \Diamond p$, luego $\kappa \not\vdash_x \Box \Diamond p$ para todos estos elementos $x \neq h$. En cambio $\kappa \vdash_h \Box \Diamond p$, de nuevo porque no existe elemento alguno $y \in X$ con hRy .

- ♣) Ahora como $\bar{v}_d[p] = V$ se obtiene:

$$\kappa \not\vdash_d p \rightarrow \Box \Diamond p.$$

Lo mismo sucede en los mundos f y g . Esto es consistente con la afirmación 2.6 pues la relación R no es simétrica.

Para una referencia más detallada de la lógica modal, los modelos de Kripke y la expresión de propiedades de la relación de accesibilidad mediante la validez de fórmulas modales, se puede consultar el trabajo [15].

2.2. Haces

Antes de una definición formal de haz, se mostrará un ejemplo inicial.

Ejemplo 2.12. Dado un espacio topológico X , se define la función

$$C : \mathbf{Ab}(X)^{op} \longrightarrow \mathbf{Con}$$

para cada abierto $U \in \mathbf{Ab}(X)$ como sigue:

$$C(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es una función continua}\}.$$

Ahora, si $V \subseteq U$ es un abierto y $f \in C(U)$ entonces $f|_V$ es la restricción de f al subconjunto abierto V . Como esta restricción también es continua, se tiene una función:

$$\begin{array}{ccc} C(U) & \longrightarrow & C(V) \\ f & \longmapsto & f|_V \end{array}$$

De esta manera, C define un funtor contravariante $\mathbf{Ab}(X)^{op} \longrightarrow \mathbf{Con}$.

Una característica especial de este funtor es que si $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de U y $\{f_i\}_{i \in I}$ es una familia de funciones continuas $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R} \in C(U_i)$, entonces existe a lo más una función continua $f : U \longrightarrow \mathbb{R} \in C(U)$ que extiende esta familia, esto es, con restricciones $f|_{U_i} = f_i$ para cada $i \in I$. Además, tal f existe si y sólo si las funciones f_i coinciden en las intersecciones de sus respectivos dominios, es decir, $f_i(x) = f_j(x)$ para cada $x \in U_i \cap U_j$, con $i, j \in I$. Esto se verifica a continuación.

\Rightarrow) Si $W \subseteq V \subseteq U$ entonces para cada $f \in C(U)$ se tiene $(f|_V)|_W = f|_W$, es decir, la restricción es transitiva. Así, dado que $U_i \cap U_j \subseteq U_i \subseteq U$, $U_i \cap U_j \subseteq U_j \subseteq U$ y $f|_{U_i} = f_i$ para cada $i \in I$ entonces:

$$\begin{aligned} f_i|_{U_i \cap U_j} &= (f|_{U_i})|_{U_i \cap U_j} \\ &= f|_{U_i \cap U_j} \\ &= (f|_{U_j})|_{U_i \cap U_j} \\ &= f_j|_{U_i \cap U_j} \end{aligned}$$

y así las funciones f_i, f_j coinciden en las intersecciones de sus respectivos dominios.

\Leftarrow) Existencia. Dado $x \in U$, como $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de U existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$ y se define $f(x) = f_i(x)$.

Esta función está bien definida. Pues si $x \in U_i \cap U_j$, entonces por hipótesis $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, es decir, $f_i(x) = f_j(x)$. Por la definición se sigue de inmediato que $f|_{U_i} = f_i$ para cada $i \in I$. Por la misma razón, dado que f coincide con la función continua f_i en el abierto U_i entonces f es continua en todo su dominio U .

Unicidad. Sea $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $g|_{U_i} = f_i$ para cada $i \in I$. Para cada $x \in U$ existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$ y así:

$$g(x) = g|_{U_i}(x) = f_i(x) = f(x).$$

Por tanto $f = g$.

Teniendo en cuenta lo anterior, se motiva la definición de haz dada a continuación.

Definición 2.13. Dado un espacio topológico X , un haz sobre X es un funtor contravariante $H : \mathbf{Ab}(X)^{op} \longrightarrow \mathbf{Con}$ tal que para cada $U \in \mathbf{Ab}(X)$ y cada cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de U se tiene que, dados $a_i \in H(U_i)$ tales que $a_i|_{U_i \cap U_j} = a_j|_{U_i \cap U_j}$ para cada $i, j \in I$, existe un único $a \in H(U)$ tal que $a|_{U_i} = a_i$.

En la definición anterior, para $U_i \subseteq U$ se tiene una función $H_{UU_i} : U \rightarrow U_i$ y el elemento $H_{UU_i}(a)$ se denota $a|_{U_i}$, por analogía con el caso de las funciones continuas (véase el ejemplo 2.12). Así, la condición de compatibilidad $a_i|_{U_i \cap U_j} = a_j|_{U_i \cap U_j}$ significa la coincidencia de los elementos a_i por las funciones del prehaz.

Esta definición 2.13 justifica el hecho de que los funtores $F : \mathbf{Ab}(\mathbf{X})^{op} \rightarrow \mathbf{Con}$ se denominan *prehaces* sobre X (véase el ejemplo 1.47).

Ejemplo 2.14. *El ejemplo inicial 2.12, además de ser un haz, se puede generalizar de varias maneras.*

- Si X, Y son espacios topológicos entonces para cada abierto U de X se define

$$C^Y(U) = \{f : U \rightarrow Y \mid f \text{ es una función continua}\}.$$

Con las restricciones, esto define un haz C^Y sobre el espacio X .

- Ahora sea X un subconjunto abierto de algún \mathbb{R}^n con su estructura métrica usual. Fijado un entero $k \geq 0$, para cada abierto U de X se define

$$C^k(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es una función } k \text{ veces diferenciable}\}.$$

Con las restricciones, esto define un haz C^k sobre X .

- Si X es un subconjunto abierto de algún \mathbb{C}^n con su estructura métrica usual, para cada abierto U de X se define

$$C^\omega(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es una función analítica}\}.$$

Con las restricciones, esto define un haz C^ω sobre X .

Ejemplo 2.15. *Sea X cualquier espacio topológico y sea $x_0 \in X$ un elemento fijo. Se define el prehaz $F : \mathbf{Ab}(\mathbf{X})^{op} \rightarrow \mathbf{Con}$ como sigue:*

- Para cada abierto U es

$$F(U) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } x_0 \in U; \\ \{0\} & \text{si } x_0 \notin U. \end{cases}$$

- Para cada par de abiertos U, V tales que $V \subseteq U$ es

$$F_{UV} = \begin{cases} id_{\mathbb{Z}} & \text{si } x_0 \in V; \\ 0 \text{ (constante 0)} & \text{si } x_0 \notin V. \end{cases}$$

Ahora se considera un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de un abierto U y una familia $\{n_i\}_{i \in I}$ con $n_i \in F(U_i)$ tal que $n_i|_{U_i \cap U_j} = n_j|_{U_i \cap U_j}$ para cada $i, j \in I$. Se nota que si $x_0 \notin U_i$ entonces $n_i = 0$, en caso contrario podría ser un entero no nulo.

♣) Si $x_0 \in U$ entonces $x_0 \in U_i$ para algún $i \in I$ y se escoge $n = n_i \in F(U)$.

Este elemento no depende del índice i porque si también $x_0 \in U_j$ entonces $x_0 \in U_i \cap U_j$ de donde $n_i = n_i|_{U_i \cap U_j} = n_j|_{U_i \cap U_j} = n_j$. En estas circunstancias, para cada $k \in I$ con $x_0 \in U_k$ se tiene $n_k = n_i = n = n|_{U_k}$ mientras para cada $k \in I$ con $x_0 \notin U_k$ se tiene $n_k = 0 = n|_{U_k}$. Es claro que este elemento $n \in F(U)$ es el único que satisface estas restricciones.

♣) Si $x_0 \notin U$ entonces $x_0 \notin U_i$ para cada $i \in I$ y se escoge $0 \in F(U)$.

En estas circunstancias, para cada $k \in I$ se tiene $n_k = 0 = 0|_{U_k}$. De nuevo es claro que este elemento $0 \in F(U)$ es el único que satisface estas restricciones.

En conclusión, este funtor F es un haz sobre X .

Todos los haces sobre un espacio topológico fijo X constituyen una categoría, denotada $\mathbf{Sh}(X)$, cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre los haces.

2.2.1. Haces como espacios étale

En esta sección se plantea la noción de haz sobre un espacio topológico sin usar las herramientas categóricas mencionadas en el apartado anterior. Aunque la presentación en términos de funtores resulta muy elegante, definir esta noción usando solamente conceptos topológicos es mucho más práctico e intuitivo. En realidad, existe una equivalencia entre las dos maneras de considerar los haces.

De fibrados a prehaces

Dado de nuevo el espacio topológico fijo X , en el ejemplo 1.47 se presentó un *fibrado* sobre X como una pareja (E, p) donde $p : E \rightarrow X$ es una función continua. En este contexto, dado $x \in X$ la *fibra* de E sobre x es la imagen recíproca $p^{-1}(x)$, a veces es conveniente pensar un fibrado como una familia indexada de fibras. Por otro lado, una *sección* del fibrado (E, p) sobre un abierto U de X es una función continua $\sigma : U \rightarrow E$

tal que $p\sigma = i_U$ siendo $i_U : U \hookrightarrow X$ la inclusión, es decir, $p(\sigma(x)) = x$ para cada $x \in U$. Ahora, dado un fibrado $p : E \rightarrow X$, para cada abierto U de X se considera el conjunto

$$\Gamma_p(U) = \{ \sigma : U \rightarrow E \mid \sigma \text{ es una sección} \}.$$

Como en los ejemplos del apartado anterior, si $V \subseteq U$ entonces se tiene la función restricción $\Gamma_p(U) \rightarrow \Gamma_p(V)$, luego

$$\Gamma_p : \mathbf{Ab}(X)^{op} \rightarrow \mathbf{Con}$$

define un funtor contravariante. Es decir, cualquier fibrado determina un prehaz.

Ahora, sea U un abierto de X , sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de U y sea $\{\sigma_i\}$ una familia de secciones con $\sigma_i \in \Gamma_p(U_i)$ tal que $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}$ para cada $i, j \in I$. Entonces se tiene:

♣) Para $x \in U$ es $x \in U_i$ para algún $i \in I$ y se define $\sigma(x) = \sigma_i(x)$.

Esta definición no depende del índice i porque si también $x \in U_j$ entonces $x \in U_i \cap U_j$ de donde $\sigma_i(x) = \sigma_i|_{U_i \cap U_j}(x) = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}(x) = \sigma_j(x)$. Dado que σ coincide con la función continua σ_i en el abierto U_i entonces σ es continua en todo su dominio U . Además $p(\sigma(x)) = p(\sigma_i(x)) = x$ de manera que $p\sigma = i_U$. Así, $\sigma \in \Gamma_p(U)$ es una sección sobre U .

♣) Esta es la única sección σ tal que $\sigma|_{U_i} = \sigma_i$ para cada $i \in I$.

La igualdad $\sigma|_{U_i} = \sigma_i$ se sigue de inmediato por la definición. La unicidad también es clara.

En conclusión, Γ_p es un haz de conjuntos sobre X , llamado el *haz de secciones* del fibrado p . Así cada fibrado sobre el espacio topológico X determina un haz sobre X .

Ahora, si $f : p \rightarrow p'$ es un morfismo de fibrados sobre X (véase el ejemplo 1.47) y $s : U \rightarrow E$ es una sección de p , entonces fs es una sección de p' pues $p'fs = ps = i_U$. Dado que $s \in \Gamma_p(U)$ asigna un elemento $fs \in \Gamma_{p'}(U)$ entonces se tiene una función $\Gamma_p \rightarrow \Gamma_{p'}$ que en realidad es una transformación natural entre los haces Γ_p y $\Gamma_{p'}$, notada $f-$. Por tanto, un morfismo de fibrados $f : p \rightarrow p'$ induce un morfismo de haces $\Gamma f : \Gamma_p \rightarrow \Gamma_{p'}$, y así

$$\Gamma : \mathbf{Fib}(X) \rightarrow \mathbf{Con}^{\mathbf{Ab}(X)^{op}}$$

es un funtor donde $\Gamma p = \Gamma_p$, y para $f : p \rightarrow p'$ se toma $\Gamma f = f-$.

De prehaces a fibrados

Dado un prehaz $P : \mathbf{Ab}(X)^{op} \longrightarrow \mathbf{Con}$ sobre el espacio X , se define ahora la noción de germen respecto a P . Si $x \in X$, dadas las vecindades abiertas U, V de x y los elementos $s \in PU, t \in PV$ se define $s \sim t$ si existe una vecindad abierta W de x tal que $W \subseteq U \cap V$ y $s|_W = t|_W$, es decir, si sus “restricciones” coinciden en PW . Para un elemento x de X fijo esta relación \sim es de equivalencia. Las propiedades reflexiva y simétrica son evidentes por definición; para la propiedad transitiva sean $s \in PU, t \in PV, u \in PW$ tales que $s \sim t$ y $t \sim u$, entonces existen vecindades abiertas W_1, W_2 de x que satisfacen $W_1 \subseteq U \cap V, W_2 \subseteq V \cap W$ con $s|_{W_1} = t|_{W_1}$ y $t|_{W_2} = u|_{W_2}$. Luego $W_1 \cap W_2 \subseteq U \cap W$ y se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$s|_{W_1 \cap W_2} = s|_{W_1}|_{W_1 \cap W_2} = t|_{W_1}|_{W_1 \cap W_2} = t|_{W_1 \cap W_2} = t|_{W_2}|_{W_1 \cap W_2} = u|_{W_2}|_{W_1 \cap W_2} = u|_{W_1 \cap W_2},$$

lo cual muestra que $s \sim u$. La clase de equivalencia de cada elemento s se denota $germ_x s$ y se denomina el *germen* de s en x respecto al prehaz P .

Ahora se considera el conjunto

$$P_x = \{germ_x s \mid s \in PU, U \text{ vecindad abierta de } x\},$$

además se define $\Lambda_P = \bigsqcup_{x \in X} P_x$ (unión disyunta) y se define la función $p : \Lambda_P \longrightarrow X$ como $p(germ_x s) = x$, de tal modo que cada P_x es la imagen recíproca del punto x .

Para definir una topología adecuada sobre Λ_P se nota que cada elemento $s \in PU$ determina una función $\dot{s} : U \longrightarrow \Lambda_P, x \mapsto germ_x s$, y se evidencia que $p\dot{s} = i_U$. Ahora el conjunto

$$\mathfrak{B} = \{\dot{s}(U) \mid s \in PU, U \text{ abierto en } X\}$$

de todas las imágenes $\dot{s}(U)$ es una base para una topología sobre Λ_P . En efecto, por una parte es claro que $\bigcup \mathfrak{B} = \Lambda_P$. Ahora sea $a \in \dot{s}(U) \cap \dot{t}(V)$, entonces $a = s(x)$ y $a = t(x')$ para ciertos $x, x' \in X$. Pero $x = ps(x) = p(a) = pt(x') = x'$ luego a proviene del mismo elemento $x \in X$ por s y por t , y además $x \in U \cap V$. Ahora s y t coinciden en x y como en realidad se toman clases de equivalencia esto significa $s \sim t$. Luego existe un abierto $W \subseteq U \cap V$ tal que s y t coinciden en W . Así $a \in \dot{s}(W) = \dot{t}(W) \subseteq \dot{s}(U) \cap \dot{t}(V)$. Lo anterior evidencia que \mathfrak{B} es una base para una topología sobre Λ_P .

Se sigue de inmediato que $p : \Lambda_P \longrightarrow X$ no solo es continua sino que se trata de un *homeomorfismo local*, esto es, cada elemento $a \in \Lambda_P$ posee alguna vecindad abierta

A tal que la imagen $p(A)$ es abierto y además la restricción $p|_A: A \rightarrow p(A)$ es un homeomorfismo.

Definición 2.16. *Dado un espacio topológico X , un espacio étale sobre X es un par (E, p) donde E es un espacio topológico y $p: E \rightarrow X$ es un homeomorfismo local.*

Como todo homeomorfismo local en particular es una función continua, cada espacio étale es un fibrado.

Así, por el procedimiento indicado, cada prehaz sobre un espacio topológico X define un espacio étale sobre X .

Todos los espacios étale sobre un espacio topológico fijo X constituyen una categoría, denotada $\mathcal{E}t(X)$. Un morfismo entre dos espacios étale (E, p) , (E', q) sobre X es una función $h: E \rightarrow E'$ tal que $qh = p$.

Afirmación 2.17. *Cada morfismo entre espacios étale es un homeomorfismo local.*

Demostración. Sean $p: E \rightarrow X$ y $q: E' \rightarrow X$ espacios étale y sea $h: p \rightarrow q$ un morfismo entre ellos. Para $a \in E$, $h(a) \in E'$ existen respectivamente vecindades abiertas U, V tales que $p(U), q(V)$ son abiertos y $p|_U: U \rightarrow p(U)$, $q|_V: V \rightarrow q(V)$ son homeomorfismos, de donde $W = p(U) \cap q(V)$ es un abierto en X . Ahora sea $U_1 \subseteq U$ la imagen recíproca de W por p , entonces la restricción $p_1 = p|_{U_1}: U_1 \rightarrow W$ es un homeomorfismo; asimismo sea $V_1 \subseteq V$ la imagen recíproca de W por q , entonces $q_1 = q|_{V_1}: V_1 \rightarrow W$ es un homeomorfismo. Puesto que $qh = p$, también $q_1h_1 = p_1$ (aquí $h_1 = h|_{U_1}$) de donde $h_1 = (q_1)^{-1}p_1: U_1 \rightarrow V_1$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, h es un homeomorfismo local. \square

Además, una transformación natural $h: P \rightarrow Q$ entre prehaces define un morfismo entre espacios étale. En efecto, para cada abierto U y cada $x \in U$ sea h_x la función $P_x \rightarrow Q_x$ definida por $h_x(\text{germ}_x s) = \text{germ}_x(h_U(s))$, de manera que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 PU & \xrightarrow{h_U} & QU \\
 \text{germ}_x \downarrow & & \downarrow \text{germ}_x \\
 P_x & \xrightarrow{h_x} & Q_x
 \end{array}$$

Tomando la unión disyunta se obtiene una función $h' : \Lambda_P \longrightarrow \Lambda_Q$, que es un morfismo de espacios étale. De esta forma se define un funtor

$$\Lambda : \mathbf{Con}^{Ab(X)^{op}} \longrightarrow \mathbf{Fib}(X).$$

Una equivalencia y una aproximación

Los haces sobre un espacio topológico pueden verse de dos maneras equivalentes: como prehaces “exactos” (funtores que satisfacen la definición 2.13) o como fibrados que son homeomorfismos locales (definición 2.16). Esta correspondencia es, en realidad una equivalencia de categorías que resulta del par adjunto $\Lambda \dashv \Gamma$ determinado por los funtores construidos en los apartados anteriores. Esta situación se puede esquematizar en el diagrama siguiente, donde los morfismos verticales corresponden a las inclusiones de las categorías mientras los morfismos de la base son las restricciones de Λ y Γ .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{adjunción:} & \mathbf{Fib}(X) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\Gamma} \\ \xleftarrow{\Lambda} \end{array} & \mathbf{Con}^{Ab(X)^{op}} \\
 & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{equivalencia:} & \mathbf{Et}(X) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & \mathbf{Sh}(X)
 \end{array}$$

Teorema 2.18. *Para un espacio topológico X existe una equivalencia entre la categoría $\mathbf{Et}(X)$ de los espacios étale sobre X y la categoría $\mathbf{Sh}(X)$ de los haces sobre X .*

Como en todos los casos de adjunción, el funtor compuesto $\Lambda\Gamma : \mathbf{Fib}(X) \longrightarrow \mathbf{Et}(X)$ determina un par adjunto con la inclusión y como tal es un mecanismo de *aproximación*: para cualquier fibrado (E, p) sobre el espacio X , su imagen $\Lambda_{\Gamma_p} = \Lambda\Gamma(E, p)$ es el espacio étale que, en un sentido categórico, mejor se aproxima a (E, p) . En particular, Λ_{Γ_p} es isomorfo a (E, p) si y solo si este fibrado es un espacio étale.

Para una referencia más detallada sobre los haces se puede consultar el trabajo [8].

2.3. Modelos de Kripke como fibrados

Como se indicó al principio de este capítulo, se busca una forma de asociar un haz a un modelo de Kripke “modal”. El camino que se sigue a continuación para alcanzar ese objetivo es ver el modelo de Kripke como un fibrado sobre cierto espacio topológico.

2.3.1. Una construcción general

Para comenzar, se propone una manera de construir fibrados sobre un espacio topológico dado. La siguiente terminología es propia.

Definición 2.19. *Sea $p : A \rightarrow B$ una función. Una presección de p es una función $\sigma : S \rightarrow A$ donde $S \subseteq B$ y además $p\sigma = i_S$ (inclusión de S en B).*

Es decir, una presección es una inversa parcial a derecha de la función p .

Afirmación 2.20. *Si $S \subseteq B$ y $\sigma : S \rightarrow A$ una presección de $p : A \rightarrow B$ entonces $p|_{\sigma(S)} : \sigma(S) \rightarrow S$ es una función biyectiva, con inversa σ .*

Demostración. Si $p(a) = p(b)$ con $a, b \in \sigma(S)$, sean $s, t \in S$ tales que $a = \sigma(s)$, $b = \sigma(t)$ entonces $s = p\sigma(s) = p(a) = p(b) = p\sigma(t) = t$ de donde $a = \sigma(s) = \sigma(t) = b$ y p es inyectiva. Por otro lado, para cada $x \in S$ se tiene $x = p\sigma(x) = p(\sigma(x))$ con $\sigma(x) \in \sigma(S)$ luego p es sobreyectiva. La igualdad $p\sigma = i_S$ implica que la inversa de p es σ . \square

Definición 2.21. *Sea X un espacio topológico con una subbase de abiertos \mathcal{H} y sea $p : E \rightarrow X$ una función. Dada una familia Σ de presecciones $\sigma : V \rightarrow E$ definidas en abiertos generadores $V \in \mathcal{H}$, sobre E se considera la topología τ_Σ generada por las imágenes de abiertos por estas presecciones, esto es:*

$$\tau_\Sigma = \langle \sigma(A) \mid \sigma \in \Sigma, A \text{ es abierto en } X \rangle.$$

Nótese que si bien el dominio de cada presección escogida σ debe ser un abierto subbásico V , para generar la topología en E se toma no solo la imagen $\sigma(V)$ sino también todas las imágenes $\sigma(A)$ para A abierto arbitrario de X . Por supuesto, para $\sigma : V \rightarrow E$ fijo esto se restringe a todos los abiertos A contenidos en V .

El hecho siguiente es una consecuencia inmediata de la definición.

Afirmación 2.22. Para la topología τ_Σ , cada presección $\sigma : V \longrightarrow E \in \Sigma$ es una función abierta.

Demostración. Si $B \subseteq V$ es un abierto de V entonces $B = V \cap A$ con A abierto de X , luego B también es abierto de X porque V es abierto (generador). En consecuencia, $\sigma(B)$ es un abierto (generador) en E . \square

Las preguntas relevantes de esta construcción son bajo cuáles condiciones se tiene un fibrado y cuándo las presecciones escogidas son en realidad secciones.

Teorema 2.23. Sea X un espacio topológico con una subbase de abiertos \mathcal{H} , sea $p : E \longrightarrow X$ una función y sea Σ una familia de presecciones $\sigma : V \longrightarrow E$ definidas en abiertos generadores $V \in \mathcal{H}$.

Dado $e \in E$, si existe alguna presección $\sigma : V \longrightarrow E \in \Sigma$ tal que $e \in \sigma(V)$, entonces la función p es continua en el punto e para las topologías τ_Σ y $\langle \mathcal{H} \rangle$.

Demostración. Por hipótesis existe $x \in V$ tal que $\sigma(x) = e$. Sea $y = p(e)$ y sea U un abierto de X tal que $y \in U$. Ahora:

$$y = p(e) = p(\sigma(x)) = p\sigma(x) = i_V(x) = x$$

de donde $x = y \in U \cap V$ que es un abierto en X , luego $\sigma(U \cap V)$ es un abierto (generador) en E que contiene a $\sigma(x) = e$. En consecuencia se tiene:

$$p(\sigma(U \cap V)) = p\sigma(U \cap V) = i_V(U \cap V) = U \cap V \subseteq U,$$

luego p es continua en e . \square

Ahora se pueden establecer condiciones suficientes para que la función p sea un fibrado.

Corolario 2.24. En las condiciones del teorema 2.23, si para cada $e \in E$ existe alguna presección $\sigma : V \longrightarrow E \in \Sigma$ tal que $e \in \sigma(V)$, entonces

$$p : (E, \tau_\Sigma) \longrightarrow (X, \langle \mathcal{H} \rangle)$$

es una función continua y, por lo tanto, (E, p) es un fibrado sobre X .

La condición adicional sobre Σ significa el cubrimiento de E por integrantes de la familia, es decir, se trata de una clase de sobreyectividad. Esta condición no siempre es necesaria para la continuidad, pero bajo ciertas hipótesis adicionales sí lo es.

Afirmación 2.25. Sea X un espacio topológico con una subbase de abiertos \mathcal{H} , sea $p : E \rightarrow X$ una función y sea Σ una familia de presecciones $\sigma : V \rightarrow E$ definidas en abiertos generadores $V \in \mathcal{H}$. Para cierto $e \in E$ sea $x = p(e)$ y supóngase que existe un abierto U en X tal que $x \in U$ y $p^{-1}(U) \neq E$.

La función p es continua en el punto e para las topologías τ_Σ y $\langle \mathcal{H} \rangle$ si y solo si existe alguna presección $\sigma : V \rightarrow E \in \Sigma$ tal que $e \in \sigma(V)$.

Nótese que si la función p es sobreyectiva, la condición $p^{-1}(U) \neq E$ equivale a $U \neq X$.

Demostración.

\Rightarrow) Para el abierto dado U , como $p(e) \in U$ y p es continua en este punto, existe un abierto $A \in \tau_\Sigma$ tal que $e \in A$ y $p(A) \subseteq U$, o lo que es lo mismo, $A \subseteq p^{-1}(U)$. Por la hipótesis sobre U esta última contención implica $A \neq E$.

Por la manera en que se genera la topología sobre E , $e \in A$ con A abierto significa $e \in \bigcap_{i \in I} \sigma_i(V_i) \subseteq A$ para cierto conjunto finito I de índices, donde $\sigma_i \in \Sigma$ y $V_i \in \mathcal{H}$ para cada $i \in I$. Si I fuera vacío entonces la intersección sobre I sería todo E de donde $A = E$, lo cual es absurdo. Luego $I \neq \emptyset$ y $e \in \sigma_1(V_1)$ con $\sigma_1 : V_1 \rightarrow E \in \Sigma$.

\Leftarrow) Por el teorema 2.23. □

Corolario 2.26. En las condiciones de la afirmación 2.25, supóngase además que para cada elemento de la imagen $x \in p(E)$ existe un abierto U de X tal que $x \in U$ y $p^{-1}(U) \neq E$.

La función $p : (E, \tau_\Sigma) \rightarrow (X, \langle \mathcal{H} \rangle)$ es continua si y solo si para cada $e \in E$ existe alguna presección $\sigma : V \rightarrow E \in \Sigma$ tal que $e \in \sigma(V)$.

Ahora bien, las presecciones de Σ no siempre son funciones continuas para esta topología τ_Σ , es decir, no siempre resultan ser secciones. Esto se debe a que la proyección por p de una intersección $\sigma(V) \cap \rho(W)$ no necesariamente coincide con toda la intersección $V \cap W$, luego no siempre es un abierto en X .

Teorema 2.27. Sea X un espacio topológico con una subbase de abiertos \mathcal{H} , sea $p : E \rightarrow X$ una función y sea Σ una familia de presecciones $\sigma : V \rightarrow E$ definidas en abiertos generadores $V \in \mathcal{H}$.

Una presección $\sigma : V \rightarrow E \in \Sigma$ es continua en $x \in V$ para las topologías $\langle \mathcal{H} \rangle$ y τ_Σ si y solo si para cada $\rho : W \rightarrow E \in \Sigma$ que satisface $\rho(x) = \sigma(x)$ existe un abierto A de X con $x \in A \subseteq V \cap W$ tal que $\rho|_A = \sigma|_A$.

Demostración.

\Rightarrow) Si σ es continua en x , sea $\rho : W \rightarrow E \in \Sigma$ con $\rho(x) = \sigma(x)$ entonces $\rho(W)$ es una vecindad abierta de $\sigma(x)$ y por la continuidad existe una vecindad (que se puede tomar abierta) A de x , contenida en el dominio de σ , tal que $\sigma(A) \subseteq \rho(W)$. Para cada $a \in A$ se tiene $\sigma(a) = \rho(b)$ para algún $b \in W$, pero siendo σ, ρ presecciones resulta $a = p\sigma(a) = p\rho(b) = b$. De aquí se concluye que $a \in W$, de donde $A \subseteq V \cap W$, pero además que $\sigma(a) = \rho(b) = \rho(a)$, es decir, $\sigma|_A = \rho|_A$.

\Leftarrow) Sea F una vecindad de $\sigma(x)$ en E para la topología τ_Σ , entonces existen finitos generadores $W_i \in \mathcal{H}$ y presecciones $\rho_i : W_i \rightarrow E \in \Sigma$ (con $1 \leq i \leq n$) tales que $\sigma(x) \in \rho_1(W_1) \cap \rho_2(W_2) \cap \cdots \cap \rho_n(W_n) \subseteq F$. Para cada i existe $w_i \in W_i$ tal que $\sigma(x) = \rho_i(w_i)$ pero siendo presecciones resulta $x = p\sigma(x) = p\rho_i(w_i) = w_i$ de donde $\sigma(x) = \rho_i(x)$. Por hipótesis, existe un abierto A_i con $x \in A_i \subseteq V \cap W_i$ tal que $\rho_i|_{A_i} = \sigma|_{A_i}$. Sea entonces $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, esta es una vecindad abierta de x y además para cada $a \in A$ se tiene $\sigma(a) = \rho_i(a) \in \rho_i(W_i)$, luego $\sigma(A) \subseteq F$ y así σ es continua en x . \square

Ahora se pueden establecer las condiciones para que todas las presecciones de la familia Σ sean, en efecto, secciones de p .

Corolario 2.28. *En las condiciones del teorema 2.27, todas las presecciones de Σ son continuas para la topología τ_Σ si y solo si para cada $\sigma, \rho \in \Sigma$ tales que $\sigma(x) = \rho(x)$ en algún $x \in X$, existe un abierto A de X con $x \in A$ tal que $\sigma|_A = \rho|_A$.*

Nótese que, aún así, pueden existir secciones que no provengan de integrantes de la familia Σ .

Combinando los resultados de este apartado se pueden enunciar algunas condiciones suficientes para que el espacio construido (E, τ_Σ) sea un espacio étale sobre X .

Teorema 2.29. *Sea X un espacio topológico con una subbase de abiertos \mathcal{H} , sea $p : E \rightarrow X$ una función y sea Σ una familia de presecciones $\sigma : V \rightarrow E$ definidas en abiertos generadores $V \in \mathcal{H}$. Si se cumple:*

- a) *Para cada $e \in E$ existe alguna presección $\sigma : V \rightarrow E \in \Sigma$ tal que $e \in \sigma(V)$*
- b) *Para cada $\sigma, \rho \in \Sigma$ tales que $\sigma(x) = \rho(x)$ en algún $x \in X$ existe un abierto A de X con $x \in A$ tal que $\sigma|_A = \rho|_A$*

entonces la función

$$p : (E, \tau_\Sigma) \longrightarrow (X, \langle \mathcal{H} \rangle)$$

es un homeomorfismo local y, por lo tanto, (E, p) es un espacio étale sobre X .

Demostración. Dado cualquier punto $e \in E$, por la hipótesis **(a)** existe una presección $\sigma : V \longrightarrow E \in \Sigma$ tal que $e \in \sigma(V)$, este conjunto $\sigma(V)$ es un abierto de E . Por la afirmación 2.20 la función $p|_{\sigma(V)} : \sigma(V) \longrightarrow V$ es biyectiva con inversa σ ; por el corolario 2.26 y de nuevo por **(a)** esta función $p|_{\sigma(V)}$ es continua; por el corolario 2.28 y por **(b)** la función inversa σ también es continua. Luego la restricción de p al abierto $\sigma(V)$ es un homeomorfismo y de esta manera p es un homeomorfismo local. \square

Vale la pena resaltar, por fin, que la construcción propuesta en este apartado depende de la subbase \mathcal{H} escogida y también de la familia Σ de presecciones (que también depende de la subbase).

2.3.2. Construcción para un modelo de Kripke

En lo que sigue, $\kappa = (\mu, \nu)$ es un modelo de Kripke sobre el marco modal $\mu = (X, R)$. Para cada elemento $x \in X$ se considera el conjunto F_x de las fórmulas modales válidas en ese punto x , esto es:

$$F_x = \left\{ \varphi \mid \kappa \vDash_x \varphi \right\}.$$

Por supuesto una misma fórmula puede ser válida en muchos puntos (véanse los ejemplos de la sección 2.1). Para indicar que una fórmula φ se está considerando en el conjunto F_x se utilizará la notación $\varphi_x \in F_x$.

Ahora sea $F = \bigsqcup_{x \in X} F_x$ la unión disyunta de todos los conjuntos F_x , además se considera la función $p : F \longrightarrow X$ definida como sigue:

$$\begin{aligned} p : F &\longrightarrow X \\ \varphi_x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Así $p(\varphi_x) = x$, de manera que $p^{-1}(x) = F_x$ para cada $x \in X$.

Para ver la construcción anterior como un fibrado, primero se requiere una topología sobre el marco modal X . En el capítulo 1 se estudiaron varias topologías asociadas de manera natural a una relación binaria. Respecto a las topologías \mathcal{C}_R y \mathcal{S}_R para una

relación arbitraria R , no se puede asegurar que para cada fórmula $\varphi_x \in F$ exista algún abierto U distinto de X tal que $p(\varphi_x) = x \in U$ (véanse las condiciones en la afirmación 2.25). Ese es el caso del ejemplo 1.8, en el cual para $c \in X$ no existe un abierto en \mathcal{C}_R o en \mathcal{S}_R distinto de X que contenga a c . Sin embargo, para la topología \mathcal{T}_R sí se puede asegurar que para cada fórmula φ_x existe por lo menos un abierto básico $V_x \in \mathcal{T}_R$ (en principio distinto de X) tal que $p(\varphi_x) = x \in V_x$.

Por este motivo, para un modelo de Kripke $\kappa = (\mu, \nu)$ sobre el marco modal $\mu = (X, R)$ se considera el espacio topológico (X, \mathcal{T}_R) . Se recuerda que $\mathcal{T}_R = \langle H \rangle$ donde $H = \{V_x \mid x \in X\}$ y $V_x = \{y \in X \mid y R x\} \cup \{x\}$.

Ahora, dada una fórmula $\varphi \in F_x$ se construye una función $\sigma = \sigma_{\varphi_x} : V_x \longrightarrow F$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \sigma(x) = \varphi \\ \sigma(y) = (\diamond\varphi)_y & \text{si } y R x \text{ con } y \neq x \end{cases}$$

Nótese que como $\varphi \in F_x$, esto es $\kappa \models_x \varphi$, de $y R x$ se sigue que $\kappa \models_y \diamond\varphi$ luego, en efecto, $\diamond\varphi \in F_y$ y la definición de σ tiene sentido. Cada función σ depende de la fórmula φ y del punto $x \in X$ donde se está considerando, así que de manera estricta se debería escribir σ_{φ_x} . Sin embargo, para mayor claridad esta notación se omitirá cuando no sea necesaria.

Como en todos los casos la función σ escoge una fórmula de la fibra sobre el punto, esto es $\sigma(z) \in F_z$ para cada $z \in V_x$, se nota que $p(\sigma(z)) = z = i_{V_x}(z)$ así que $p\sigma = i_{V_x}$ y cada σ es una presección de p . Luego, para construir la topología sobre el conjunto F se escoge la siguiente familia de presecciones para el sistema de generadores $H = \{V_x \mid x \in X\}$:

$$\Sigma = \{\sigma_{\varphi_x} : V_x \longrightarrow F \mid \varphi \in F_x, x \in X\}.$$

Según la definición 2.21, la topología sobre el conjunto F se genera mediante las imágenes de las funciones $\sigma \in \Sigma$. En este caso se introduce una notación especial para estos conjuntos generadores, a saber:

$$W_\varphi = \sigma(V_x) = \{(\diamond\varphi)_y \mid y R x, y \neq x\} \cup \{\varphi_x\}$$

para cada $x \in X$ y cada $\varphi \in F_x$ (de nuevo, en sentido estricto debería ser W_{φ_x}). Por la afirmación 2.20 se concluye que en cada caso $p|_{W_\varphi} : W_\varphi \longrightarrow V_x$ es una función biyectiva.

En estas condiciones, siguiendo la definición 2.21 se tiene la siguiente topología:

$$\tau_\Sigma = \langle \sigma(V_x) \rangle = \langle W_\varphi \mid \varphi \in F_x, x \in X \rangle.$$

Ahora se observa que para cualquier fórmula $\varphi \in F = \bigsqcup_{x \in X} F_x$ existe algún $x \in X$ tal que $\varphi \in F_x$, y luego se define la presección $\sigma = \sigma_{\varphi_x}$ que satisface $\sigma(x) = \varphi_x = \varphi$, de manera que $\varphi \in \sigma(V_x) = W_\varphi$. Según el corolario 2.24, esto significa que para las topologías escogidas la función p es continua.

Toda la discusión anterior es la demostración del siguiente hecho.

Teorema 2.30. *Dado el modelo de Kripke $\kappa = (\mu, \nu)$ sobre el marco modal $\mu = (X, R)$, en el conjunto X se considera la topología \mathcal{T}_R y en el conjunto $F = \bigsqcup_{x \in X} F_x$ la topología $\langle W_\varphi \mid \varphi \in F_x, x \in X \rangle$. En estas condiciones la función proyección $p : F \rightarrow X$ es continua, de manera que el modelo de Kripke es un fibrado sobre X .*

En general, un modelo de Kripke considerado de esta manera no satisface la condición (b) del teorema 2.29, luego no es un espacio étale. Sin embargo, por la teoría de haces (véase [17, 25]) se sabe que a cada fibrado se puede asociar un haz, que da lugar a un espacio étale óptimo para el fibrado. De esta manera se puede asociar de manera natural un haz (o espacio étale) a cualquier modelo de Kripke para la lógica modal.

El ejemplo que sigue ilustra el caso en el cual un modelo de Kripke visto como fibrado no es un espacio étale. Por la discusión en el apartado anterior, esto se debe a que no toda presección escogida es sección.

Ejemplo 2.31. *Considérese el conjunto $X = \{a, b, c\}$ dotado de la relación:*

$$R = \{(a, b), (b, c), (a, c), (a, a), (b, b), (c, c)\}.$$

La figura 2.3 muestra la relación R mediante un diagrama. Esta relación se puede obtener considerando tres números naturales con el orden usual (reflexivo y transitivo).

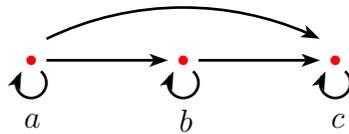


Figura 2.3: Diagrama del ejemplo 2.31

Entonces se tiene:

$$V_a = \{a\} \qquad V_b = \{a, b\} \qquad V_c = \{a, b, c\} = X$$

de donde

$$\mathcal{T}_R = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}.$$

El conjunto F y la función $p : F \rightarrow X$ se definen como se describió antes. Una subbase para la topología de F está dada por:

$$\left\{ W_{\varphi_c}, W_{\psi_b}, W_{\xi_a} \mid \kappa \vDash_c \varphi, \kappa \vDash_b \psi \text{ y } \kappa \vDash_a \xi \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} W_{\varphi_c} &= \{ (\diamond\varphi)_a, (\diamond\varphi)_b, \varphi \} && \text{para } \kappa \vDash_c \varphi \\ W_{\psi_b} &= \{ (\diamond\psi)_a, \psi \} && \text{para } \kappa \vDash_b \psi \\ W_{\xi_a} &= \{ \xi \} && \text{para } \kappa \vDash_a \xi \end{aligned}$$

Ahora bien, para cualquier fórmula φ tal que $\kappa \vDash_c \varphi$, de $b R c$ se sigue $\kappa \vDash_b \diamond\varphi$ y entonces también se tiene el abierto generador

$$W_{(\diamond\varphi)_b} = \{ (\diamond\diamond\varphi)_a, (\diamond\varphi)_b \},$$

este es un caso particular de W_{ψ_b} tomando $\psi = \diamond\varphi$. Por lo tanto la intersección

$$W_{\varphi_c} \cap W_{(\diamond\varphi)_b} = \{ (\diamond\varphi)_b \}$$

es un conjunto abierto.

Para cualquier presección σ definida en V_b o en V_c se tiene

$$\sigma^{-1}(W_{\varphi_c} \cap W_{(\diamond\varphi)_b}) = \sigma^{-1}(\{(\diamond\varphi)_b\}) = \{b\},$$

el cual no es abierto en X . Por tanto, σ no es una función continua y constituye una presección que no es sección.

En otra perspectiva, las presecciones σ_{φ_c} y $\sigma_{(\diamond\varphi)_b}$, correspondientes a los abiertos generadores W_{φ_c} y $W_{(\diamond\varphi)_b}$, coinciden en b pero no hay ningún abierto que contenga a este punto y en el cual estas dos funciones coinciden. Según el teorema 2.29, esto se requiere para que (F, p) sea un espacio étale.

Por fin, como $\{(\diamond\varphi)_b\}$ es un abierto de F pero su imagen

$$p(\{(\diamond\varphi)_b\}) = \{b\}$$

no es un abierto de X , entonces p no es un homeomorfismo local aunque la restricción a un conjunto unitario sea un homeomorfismo de manera trivial.

Así, mediante este ejemplo se muestra que el fibrado determinado por un modelo de Kripke asociado a la lógica modal no siempre es un espacio étale, ni siquiera cuando la relación es de preorden.

2.3.3. El caso intuicionista

En este punto se puede señalar la diferencia esencial de la construcción propuesta en esta tesis con la de los haces asociados a modelos de Kripke para la lógica intuicionista, tanto a nivel proposicional como al de primer orden.

Lógica proposicional intuicionista

En el contexto de la lógica proposicional intuicionista (véase [11]), el conjunto base X está dotado de una relación de preorden \leq de manera que las tres topologías consideradas en el capítulo 1 de esta tesis coinciden (corolario 1.20) y $V_x = \{y \in X \mid y \leq x\}$ es la “cola a izquierda”. El modelo de Kripke se define igual que para la lógica modal (definiciones 2.2 y 2.4). Sin embargo, en este caso se exige que la función de validez satisfaga la siguiente condición para las letras proposicionales:

$$\text{Si } \kappa \Vdash_x p \text{ entonces } \kappa \Vdash_y p \text{ para cada } y \leq x. \quad (*)$$

Luego la validez se extiende a todas las fórmulas proposicionales como sigue, nótese la diferencia con la definición 2.3:

- $\kappa \Vdash_x \alpha \wedge \beta$ si y solo si $\kappa \Vdash_x \alpha$ y $\kappa \Vdash_x \beta$
- $\kappa \Vdash_x \alpha \vee \beta$ si y solo si $\kappa \Vdash_x \alpha$ o $\kappa \Vdash_x \beta$
- $\kappa \Vdash_x \alpha \rightarrow \beta$ si y solo si $\kappa \Vdash_y \alpha$ implica $\kappa \Vdash_y \beta$ para cada $y \leq x$
- $\kappa \Vdash_x \neg \alpha$ si y solo si $\kappa \not\Vdash_y \alpha$ para cada $y \leq x$

A partir de estas cláusulas se demuestra que la condición (*) también se extiende a todas las fórmulas.

Los conjuntos F_x y su unión disyunta F se definen igual que en la sección anterior, lo mismo que la función $p : F \rightarrow X$. Dada una fórmula $\varphi \in F_x$ se define la función $\sigma = \sigma_{\varphi_x} : V_x \rightarrow F$ como

$$\sigma(y) = \varphi_y$$

para cada $y \leq x$. En el contexto de la lógica proposicional intuicionista *la misma* fórmula es válida en todo punto anterior a x , luego esta definición tiene pleno sentido. En el caso de los modelos para la lógica modal esto no es así, en ese contexto la que es válida en un punto anterior es la fórmula que indica la *posibilidad* de φ .

Estas funciones σ así definidas constituyen el conjunto Σ de las presecciones.

Ahora dados $\sigma, \rho \in \Sigma$ tales que $\sigma(x) = \rho(x)$ en algún $x \in X$, esto significa $\varphi_x = \psi_x$ donde $\varphi \in F_z, \psi \in F_w$ son fórmulas y $x \leq z, x \leq w$. Pero entonces $\varphi = \psi$ y para cada $y \leq x$ se tiene $\sigma(y) = \varphi_y = \psi_y = \rho(y)$, de manera que para el abierto $A = V_x$ de X se tiene $\sigma|_A = \rho|_A$.

Como se cumplen las condiciones del teorema 2.29, la función $p : (F, \tau_\Sigma) \rightarrow (X, \langle \mathcal{H} \rangle)$ es un homeomorfismo local. Es decir, esta construcción aplicada a cualquier modelo de Kripke para la lógica proposicional intuicionista siempre da como resultado un espacio étale sobre el marco.

Lógica intuicionista de primer orden

Respecto a la lógica intuicionista de primer orden (véase [10]), de nuevo el conjunto base X está dotado de una relación de preorden \leq . Ahora el modelo de Kripke está dado por lo siguiente: para cada $x \in X$ existe una estructura de primer orden \mathbf{K}_x (todas del mismo tipo), además para cada $x, y \in X$ tales que $y \leq x$ existe un homomorfismo $f_{yx} : \mathbf{K}_x \rightarrow \mathbf{K}_y$. Estos homomorfismos deben comportarse como un funtor (contravariante) en los índices, esto es, f_{xx} es el homomorfismo idéntico y $f_{zy}f_{yx} = f_{zx}$ para $z \leq y \leq x$.

En este caso el conjunto K es la unión disyunta de los universos \mathbf{K}_x y $p : K \rightarrow X$ es la proyección definida como antes. Dado un elemento $\alpha \in \mathbf{K}_x$ se define la función $\sigma = \sigma_\alpha : V_x \rightarrow K$ como

$$\sigma(y) = f_{yx}(\alpha)$$

para cada $y \leq x$, nótese que en particular $\sigma(x) = f_{xx}(\alpha) = \alpha$. Estas funciones σ así definidas constituyen el conjunto Σ de las presecciones.

Si $\sigma, \rho \in \Sigma$ satisfacen $\sigma(x) = \rho(x)$ en algún $x \in X$, sean $\alpha \in \mathbf{K}_z, \beta \in \mathbf{K}_w$ con $x \leq z, x \leq w$ tales que $f_{xz}(\alpha) = \sigma(x) = \rho(x) = f_{xw}(\beta)$. Entonces para cada $y \leq x$ se tiene:

$$\sigma(y) = f_{yz}(\alpha) = f_{yx}(f_{xz}(\alpha)) = f_{yx}(f_{xw}(\beta)) = f_{yw}(\beta) = \rho(y),$$

de manera que para el abierto $A = V_x$ de X se tiene $\sigma|_A = \rho|_A$.

Como de nuevo se cumplen las condiciones del teorema 2.29, la función proyección $p : (K, \tau_\Sigma) \longrightarrow (X, \langle \mathcal{H} \rangle)$ es un homeomorfismo local. Es decir, esta construcción aplicada a cualquier modelo de Kripke para la lógica intuicionista de primer orden también da como resultado un espacio étale sobre el marco.

En conclusión, el tratamiento elaborado en la sección 2.3.1 se aplica tanto a los modelos de Kripke para la lógica modal estudiados en este trabajo como a los modelos de Kripke para la lógica proposicional intuicionista dados en [11] y a los modelos de Kripke para la lógica intuicionista de primer orden desarrollados en [10]. En el caso de la lógica modal se obtiene un fibrado, en los otros dos casos resultan siempre espacios étale.

Capítulo 3

Gráficos Gama como haces

En este capítulo se propone una forma de generar diferentes sistemas de gráficos existenciales Gama modales a partir de su interpretación como un haz de hojas de aserción. En el procedimiento se combinan las estructuras de fibrados y haces descritas en el capítulo anterior con los modelos de Kripke y los gráficos existenciales, todo de una forma original y novedosa. El objetivo final es obtener las reglas de transformación Gama de un modo más natural.

3.1. Los gráficos existenciales Gama

Los gráficos existenciales son un sistema de representación gráfico de la lógica, en el cual por medio de una serie de herramientas tales como la hoja de aserción, las proposiciones y los cortes se dibujan las sentencias, y luego mediante ciertas reglas de transformación se pueden deducir nuevas sentencias a partir de unas dadas. Este sistema de representación fue publicado por primera vez en 1897 por Charles Sanders Peirce (1839-1914) con el nombre *entitative graphs* o gráficos entitativos, pero luego de algunas modificaciones él mismo decidió cambiarle el nombre al de *existential graphs* o gráficos existenciales. Para más información general sobre estos gráficos se puede consultar la bibliografía, en especial [22, 23, 26, 28, 29, 31].

Peirce dedicó el resto de su vida al desarrollo de los gráficos existenciales y los clasificó en tres subsistemas:

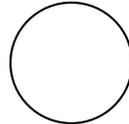
- Gráficos existenciales *Alfa*, correspondientes al actual cálculo proposicional clásico;
- Gráficos existenciales *Beta*, correspondientes a la lógica de primer orden con igualdad;
- Gráficos existenciales *Gama*, que incluyen algunas lógicas modales.

Este trabajo de investigación está centrado en los gráficos existenciales Gama. Para un estudio anterior sobre este subsistema se puede consultar el trabajo [18]. A continuación se presentarán estos gráficos en un orden que ya se ha estandarizado explicando sus elementos, interpretación, reglas de formación y reglas de transformación.

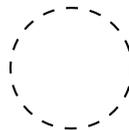
3.1.1. Elementos

Los gráficos Gama se construyen con los siguientes elementos:

- Una superficie plana sobre la cual se va a escribir, llamada *hoja de aserción*.
- Un número finito de *proposiciones* X_1, X_2, \dots, X_n .
- Un número finito de *cortes continuos* que son curvas cerradas simples.



- Un número finito de *cortes quebrados* que son curvas cerradas simples pero presentadas de manera interrumpida, quebrada o punteada.



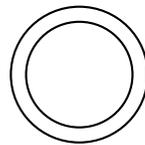
3.1.2. Reglas de formación

Una sintaxis o conjunto de reglas de formación para los gráficos Gama es la siguiente:

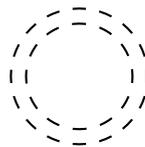
- La hoja de aserción es un gráfico Gama.
- Toda letra proposicional es un gráfico Gama.
- Un corte (continuo o quebrado) sin elementos en su interior es un gráfico Gama.
- La yuxtaposición de dos gráficos Gama también es un gráfico Gama.
- Un gráfico Gama encerrado o rodeado por un corte (continuo o quebrado) también es un gráfico.

En el contexto de los gráficos existenciales se define un *corte doble* como un par de cortes en el cual uno rodea al otro mientras el área intermedia no contiene elementos. En los gráficos Gama ocurren cuatro casos especiales:

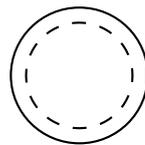
- ♣) Un corte doble *continuo* es un corte doble en el cual ambos cortes son continuos.



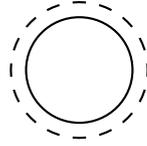
- ♣) Un corte doble *quebrado* es un corte doble en el cual ambos cortes son quebrados.



- ♣) Un corte doble *necesario* es un corte doble en el cual el corte exterior es continuo y el interior es quebrado.



- ♣) Un corte doble *posible* es un corte doble en el cual el corte exterior es quebrado y el interior es continuo.



3.1.3. Interpretación

Una semántica o interpretación de los gráficos es la siguiente:

- Lo que se escribe sobre la hoja de aserción se interpreta como verdadero.
- La yuxtaposición de gráficos se interpreta como la conjunción.
- Lo que se escribe dentro de un corte continuo en la hoja de aserción se interpreta como falso.
- Lo que se escribe dentro de un corte quebrado en la hoja de aserción se interpreta como posiblemente falso.

Esta última convención se basa en lo que escribió Peirce acerca del sentido del corte quebrado [20, Vol. 4, §515]:



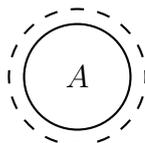
“Este diagrama no afirma que no llueve. Solo afirma que las reglas Alfa y Beta no me obligan a admitir que llueve o, lo que viene a ser lo mismo, que una persona sin información alguna, excepto un conocimiento profundo de una lógica reducida a las partes Alfa y Beta de los gráficos existenciales, no sabría que llueve”.

Ejemplo 3.1. *Siguen algunos gráficos Gama en los cuales A es una letra u otro gráfico.*

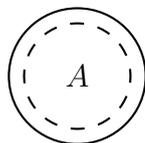
♣) *Posiblemente no A* ($\diamond\neg A$):



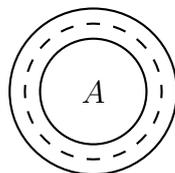
♣) *Posiblemente A* ($\diamond A$):



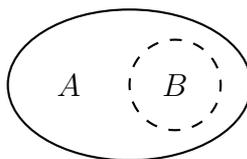
♣) *Necesariamente A* ($\square A$):



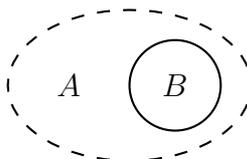
♣) *Necesariamente no A* ($\square\neg A$), o bien, *no posiblemente A* ($\neg\diamond A$):



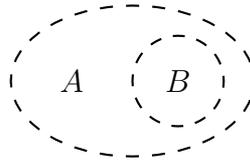
♣) *A implica necesariamente B* ($A \rightarrow \square B$):



♣) *Posiblemente, A implica B* ($\diamond(A \rightarrow B)$):



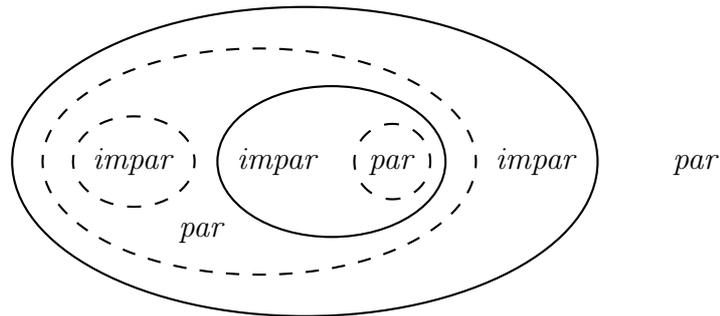
♣) Posiblemente, A implica la necesidad de B ($\diamond(A \rightarrow \square B)$):



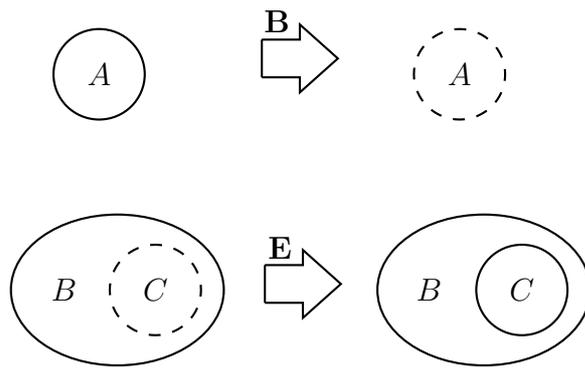
3.1.4. Transformación

Las reglas de transformación para los gráficos existenciales son Borramiento en par (B), Escritura en impar (E), Iteración hacia el interior (I), Desiteración desde el exterior (D) y Corte doble (C) [22, 23, 26, 28, 29, 31]. Las reglas de transformación Gama resultan de extender las reglas anteriores como se indica a continuación.

- La cantidad de cortes para determinar el área de una región se cuenta igual para cortes continuos y quebrados.

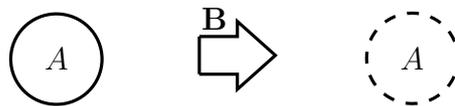


- En un área par, un corte continuo puede medio borrarse para transformarlo en un corte quebrado, dejando su contenido intacto (este es un caso de Borramiento); en un área impar, un corte quebrado puede completarse para transformarlo en un corte continuo (este es un caso de Escritura).

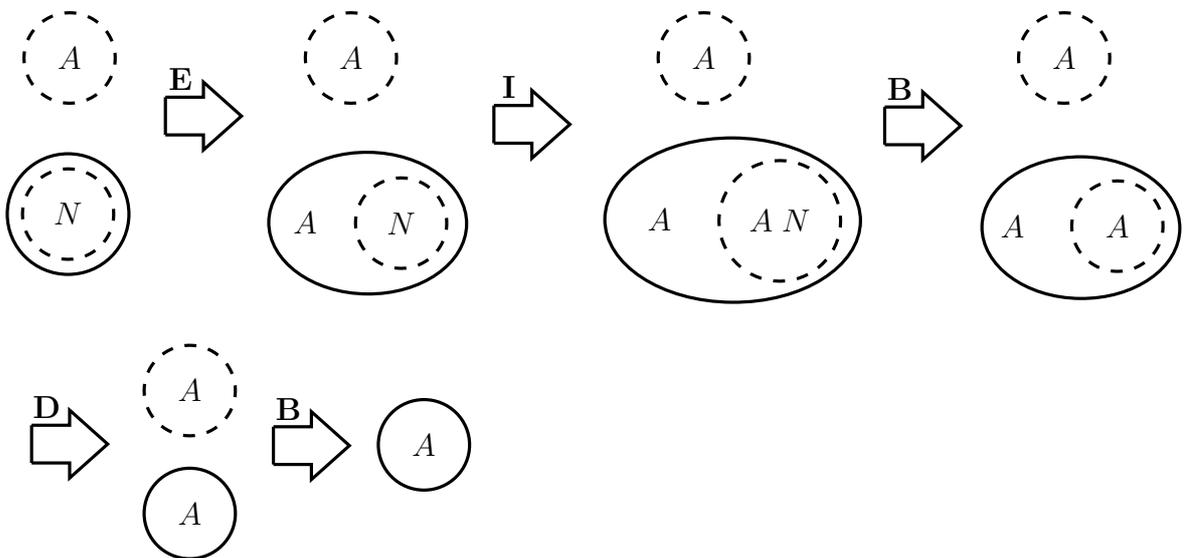


Adoptadas estas convenciones, si no se hacen más ajustes a las reglas de transformación entonces el sistema se trivializa, en el sentido que se muestra a continuación.

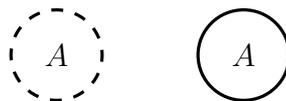
Por una parte:



y, asumiendo que se puede afirmar al menos un gráfico necesario:

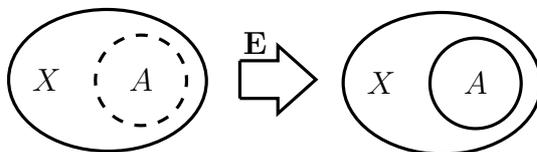


De las dos deducciones gráficas anteriores se concluye que los gráficos

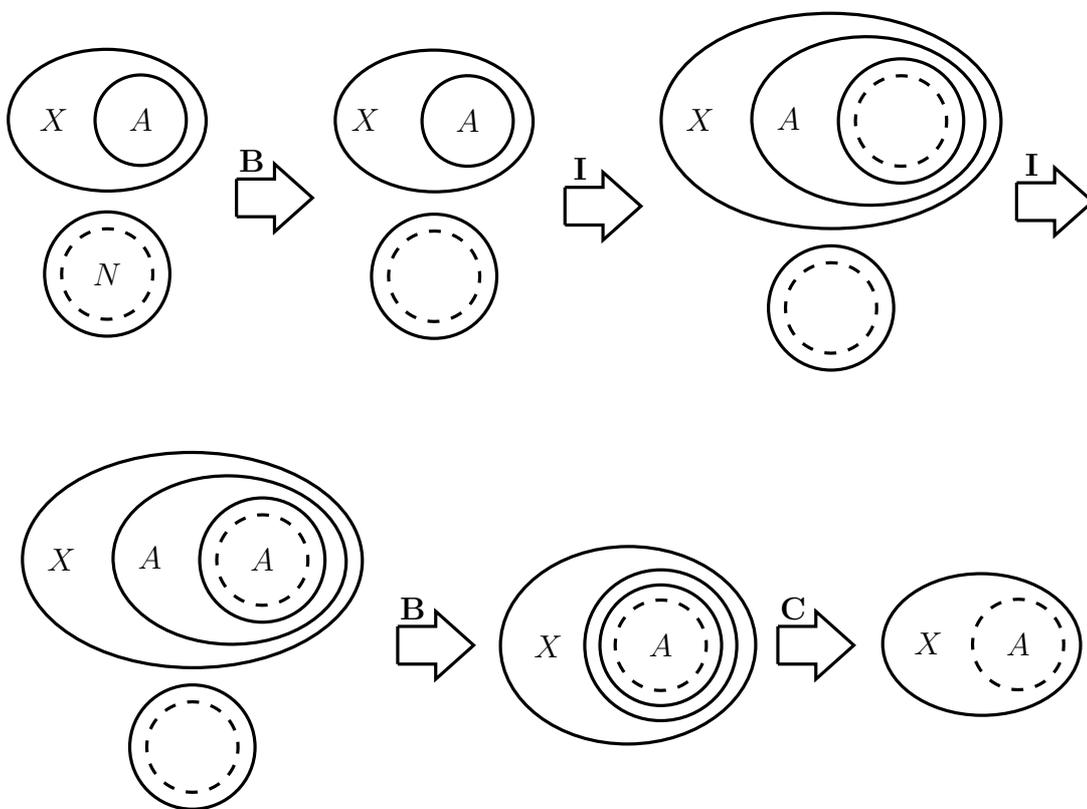


son transformables entre sí en cualquier área par.

Por otra parte:



y, asumiendo de nuevo un gráfico necesario:



De estas deducciones gráficas se concluye que los gráficos



son transformables entre sí en cualquier área impar.

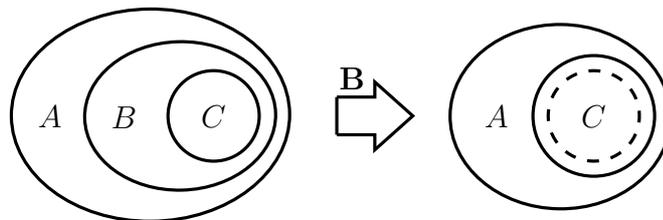
De esta manera, si no se modifican las reglas entonces o no puede afirmarse ningún gráfico necesario, o bien todo corte quebrado puede transformarse en un corte continuo y viceversa. En este último caso los cortes quebrados no representan nada nuevo en el sistema, luego el sistema Gama se reduce a los gráficos Alfa.

Analizando con cuidado las deducciones anteriores se observa que el único paso no admitido por el sistema Alfa es la iteración a través de cortes quebrados. Haciendo concesiones sobre diferentes tipos de gráficos que se pueden iterar y desiterar, se obtienen sistemas de gráficos existenciales para distintas lógicas modales. Este desarrollo se debe a Jay Zeman [31], para más detalles véase también [18, 23, 29].

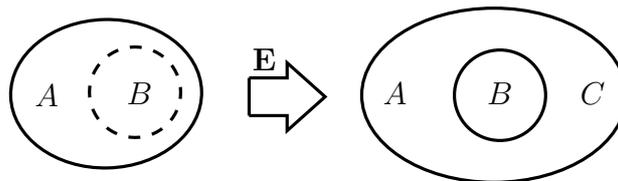
A. Un conjunto de reglas de transformación Gama para S_4

En la sección 2.1 se observó que la lógica modal S_4 de Lewis está dada por la lógica clásica junto con los axiomas modales **K**, **T** y **4**. En su versión semántica, S_4 corresponde a modelos de Kripke con el marco modal reflexivo y transitivo, es decir, la relación R del marco modal debe ser de preorden. Siguiendo la propuesta de Zeman dada en [31], se adoptan las reglas siguientes para los gráficos Gama estudiados, la única regla que cambia respecto a los gráficos Alfa es la de Iteración.

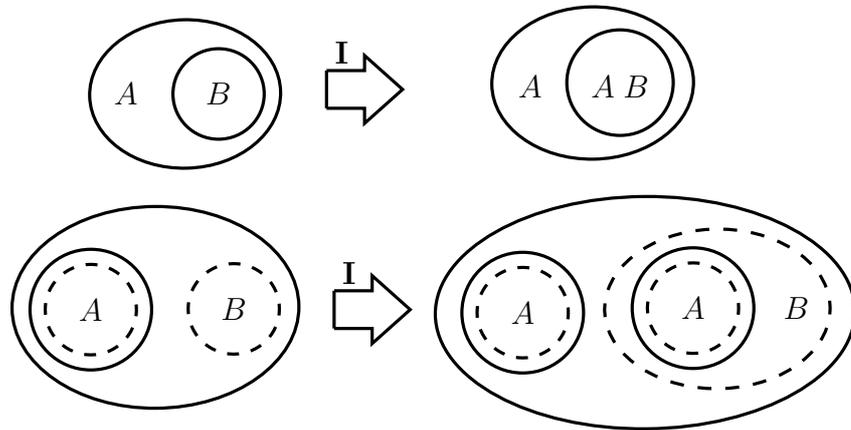
- **Borramiento (B)**: En un área par, cualquier gráfico puede borrarse y cualquier corte continuo puede medio borrarse a un corte quebrado, dejando su contenido.



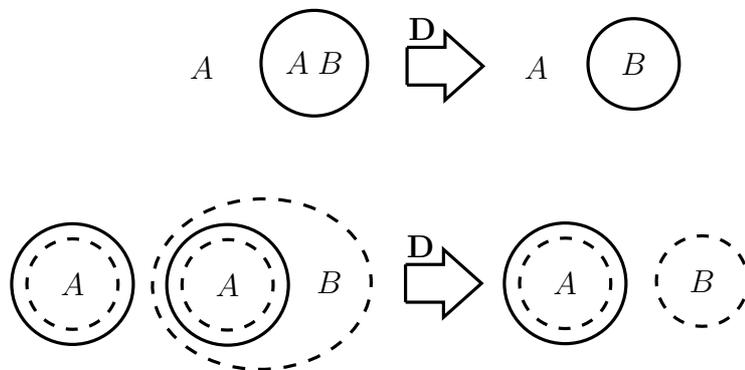
- **Escritura (E)**: En un área impar, cualquier gráfico puede escribirse y cualquier corte quebrado puede completarse a un corte continuo.



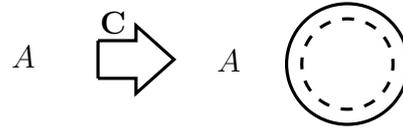
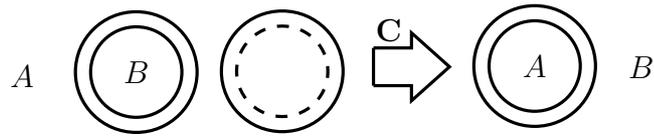
- **Iteración (I):** Cualquier gráfico puede iterarse (repetirse) en su misma área. Cualquier gráfico puede iterarse en cortes continuos adicionales (que no formen parte del gráfico a iterar) en su misma área. En cortes quebrados adicionales en la misma área, sólo pueden iterarse gráficos rodeados por un corte doble necesario.



- **Desiteración (D):** Cualquier gráfico que pueda ser resultado de una iteración permitida en la regla anterior, puede borrarse.



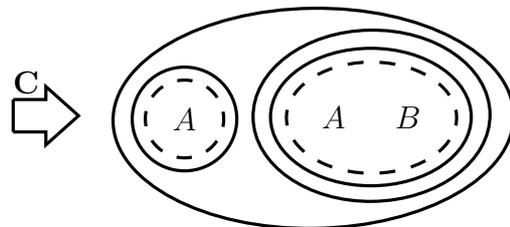
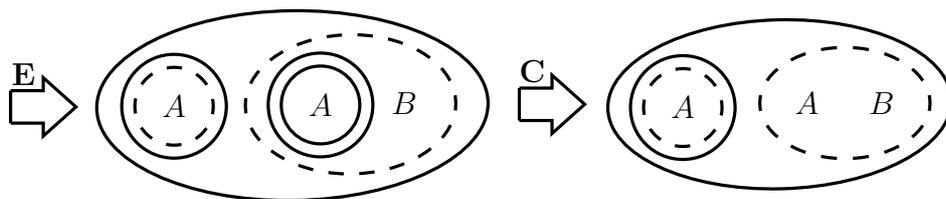
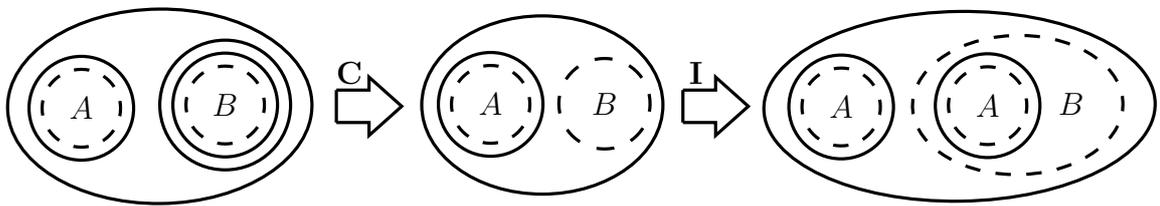
- **Corte doble (C):** Un corte doble continuo puede borrarse o escribirse alrededor de cualquier gráfico, en cualquier área. Un corte doble necesario y vacío puede borrarse o escribirse en cualquier área.



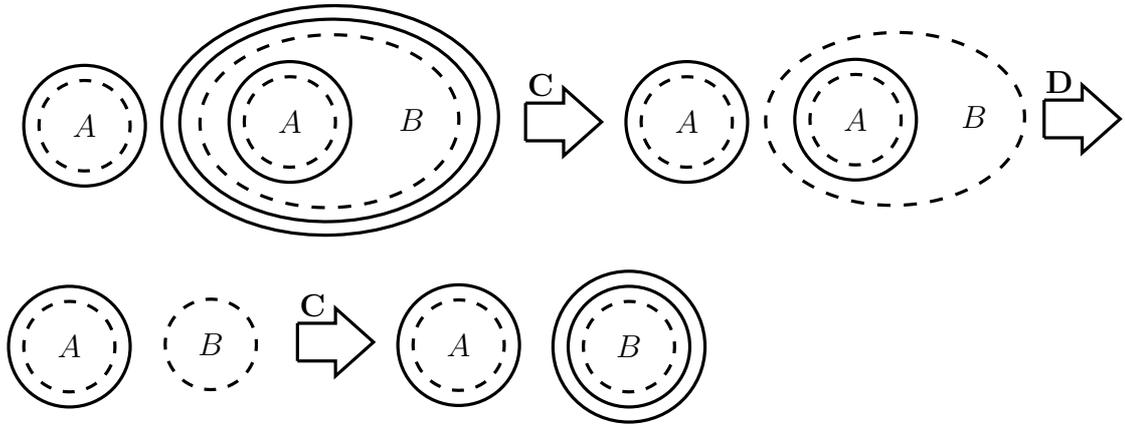
Como se pudo observar arriba en la discusión previa a las reglas, este último caso de la regla de corte doble equivale a afirmar la existencia de algún gráfico necesario. También corresponde a la *regla de necesidad* según la cual toda tautología es necesaria.

A continuación siguen algunos ejemplos de transformaciones de gráficos en S_4 , teniendo en cuenta que A se transforma en B , lo cual se denota $A \Rightarrow B$, si A es igual a B o si B resulta de A por medio de las reglas de transformación de los gráficos Gama.

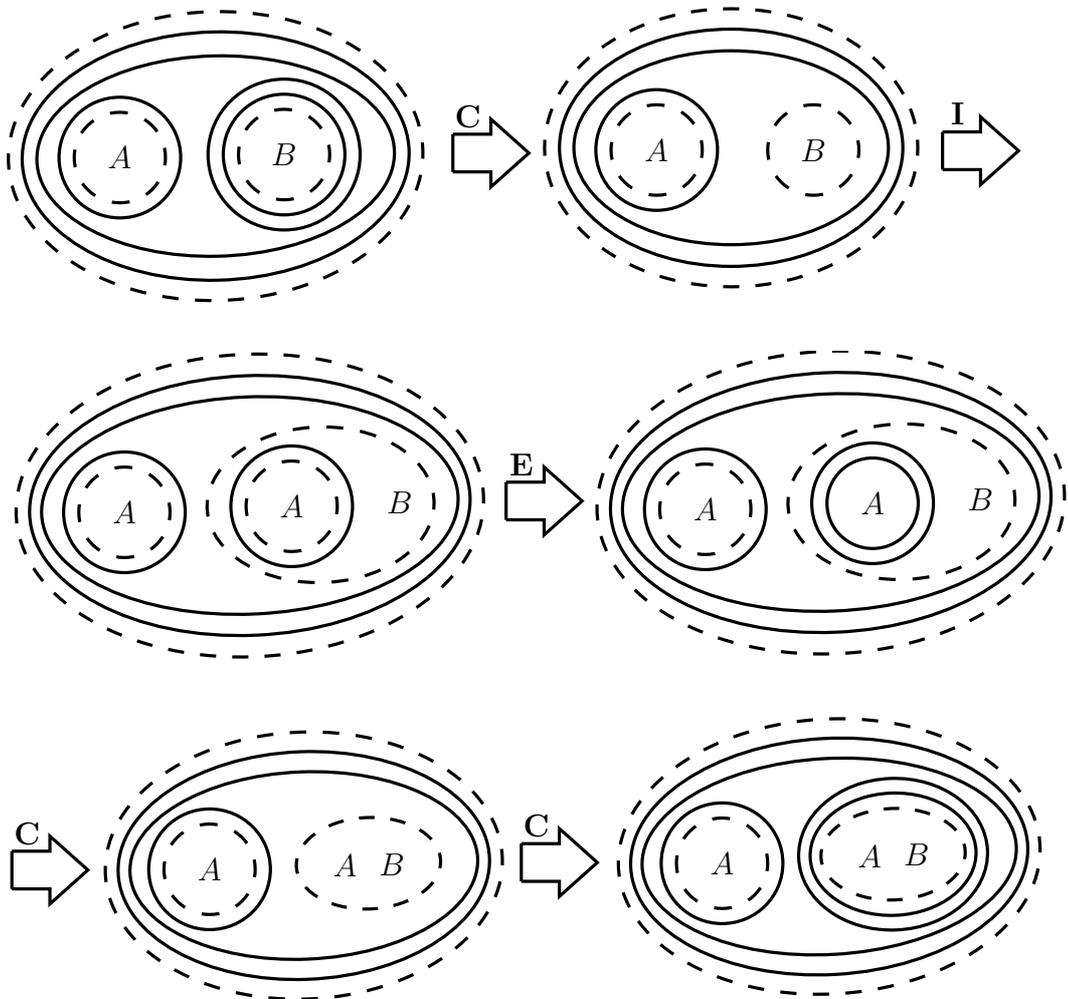
Ejemplo 3.2. $\Box A \rightarrow \Box B \Rightarrow \Box A \rightarrow \Box(A \wedge B)$.



Ejemplo 3.3. $\Box A \wedge \neg\Box(\Box A \wedge B) \Rightarrow \Box A \wedge \neg\Box B.$

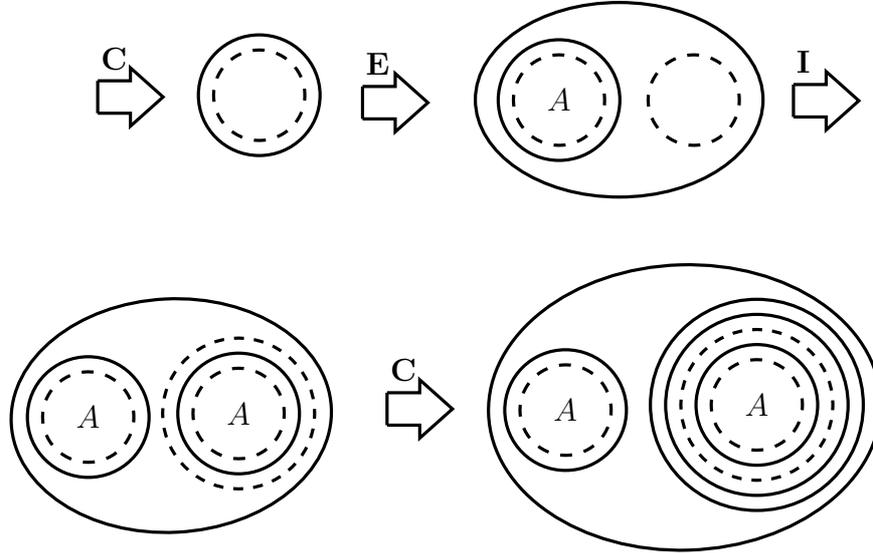


Ejemplo 3.4. $\Diamond(\Box A \rightarrow \Box B) \Rightarrow \Diamond(\Box A \rightarrow \Box(A \wedge B)).$



El ejemplo siguiente es el axioma modal **4**, muy propio de la lógica S_4 , que aquí se deduce a partir de la hoja vacía.

Ejemplo 3.5. $\Rightarrow \Box A \rightarrow \Box\Box A$.

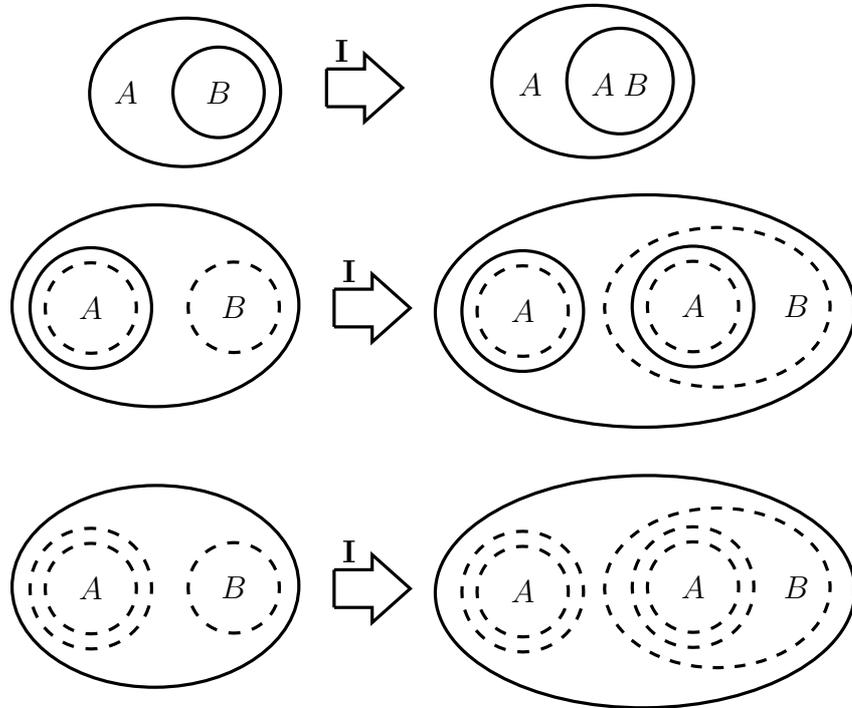


B. Un conjunto de reglas de transformación Gama para $S_{4.2}$

En la sección 2.1 se señaló que la lógica modal $S_{4.2}$ está dada por la lógica clásica junto con los axiomas modales **K**, **T**, **4** y **G**. En su versión semántica, $S_{4.2}$ corresponde a modelos de Kripke con el marco modal reflexivo, transitivo y convergente es decir, la relación R del marco modal debe ser de preorden y además para cada elementos $x, y, z \in X$ tales que $x R y$ y $y R z$ existe un elemento $u \in X$ tal que $y R u$ y $z R u$. Siguiendo la propuesta de Zeman dada en [31], se adoptan las reglas siguientes para los gráficos Gama estudiados, la única regla que cambia es la de Iteración.

- **Borramiento (B):** En un área par, cualquier gráfico puede borrarse y cualquier corte continuo puede medio borrarse a un corte quebrado, dejando su contenido.
- **Escritura (E):** En un área impar, cualquier gráfico puede escribirse y cualquier corte quebrado puede completarse a un corte continuo.
- **Iteración (I):** Cualquier gráfico puede iterarse (repetirse) en su misma área. Cualquier gráfico puede iterarse en cortes continuos adicionales (que no formen

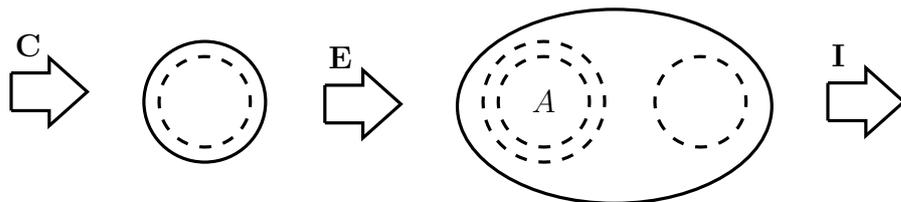
parte del gráfico a iterar) en su misma área. En cortes quebrados adicionales en la misma área, pueden iterarse gráficos rodeados por un corte doble necesario o gráficos rodeados por un corte doble quebrado.

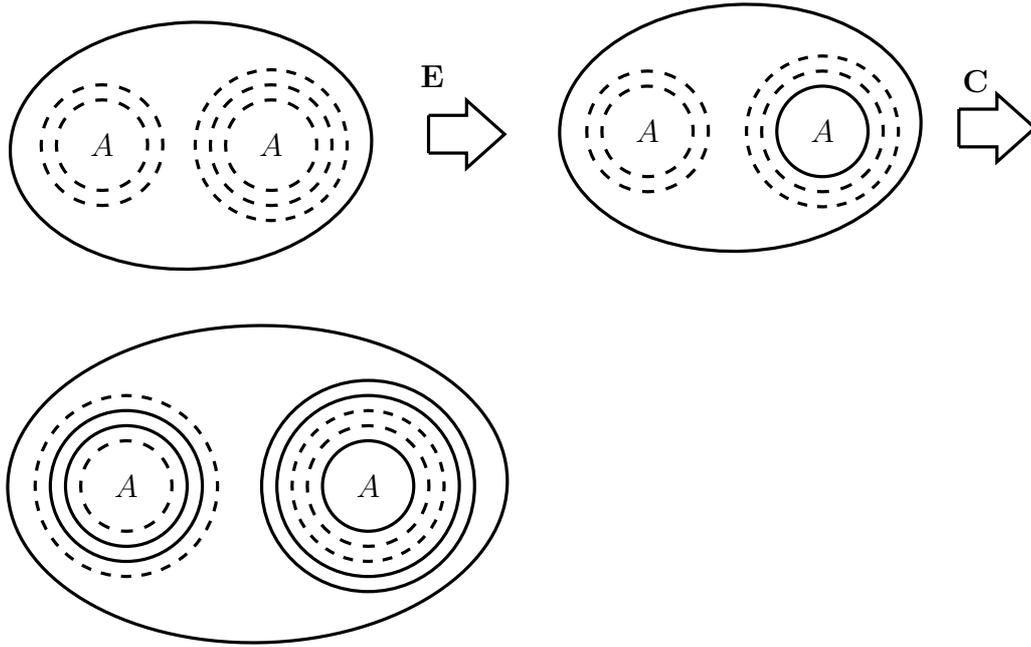


- **Desiteración (D):** Cualquier gráfico que pueda ser resultado de una iteración permitida en la regla anterior, puede borrarse.
- **Corte doble (C):** Un corte doble continuo puede borrarse o escribirse alrededor de cualquier gráfico, en cualquier área. Un corte doble necesario y vacío puede borrarse o escribirse en cualquier área.

El siguiente ejemplo de transformación de gráficos corresponde al axioma modal **G**, que establece la diferencia entre los sistemas S_4 y $S_{4,2}$.

Ejemplo 3.6. $\Rightarrow \diamond \Box A \rightarrow \Box \diamond A$.

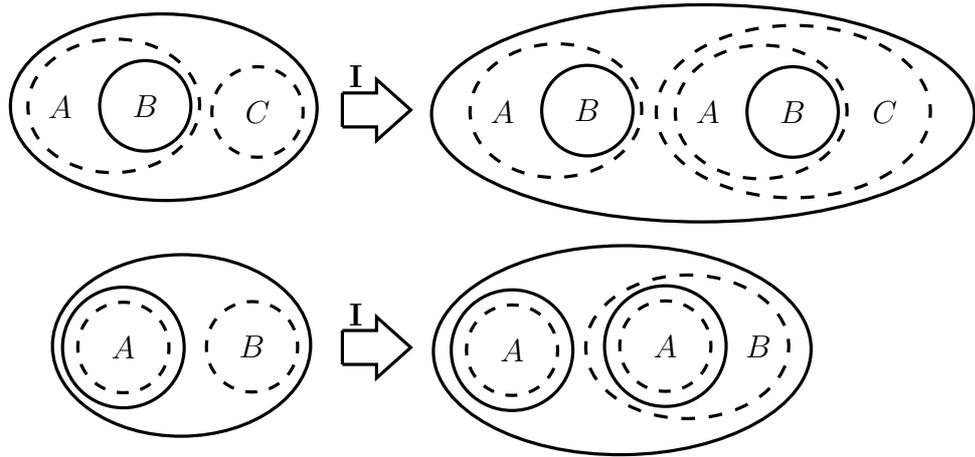




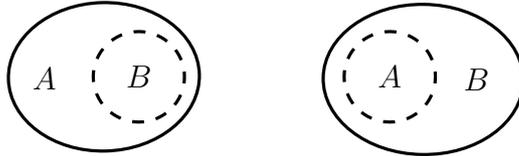
C. Un conjunto de reglas de transformación Gama para S_5

En la sección 2.1 se indicó que la lógica modal S_5 está dada por la lógica clásica junto con los axiomas modales **K**, **T** y **5**. En su versión semántica, S_5 corresponde a modelos de Kripke con el marco modal reflexivo, simétrico y transitivo, es decir, la relación R del marco modal debe ser de equivalencia. Siguiendo la propuesta de Zeman dada en [31], se adoptan las reglas siguientes para los gráficos Gama estudiados, de nuevo la única regla que cambia es la de Iteración.

- **Borramiento (B)**: En un área par, cualquier gráfico puede borrarse y cualquier corte continuo puede medio borrarse a un corte quebrado, dejando su contenido.
- **Escritura (E)**: En un área impar, cualquier gráfico puede escribirse y cualquier corte quebrado puede completarse a un corte continuo.
- **Iteración (I)**: Cualquier gráfico puede iterarse (repetirse) en su misma área. Cualquier gráfico puede iterarse en cortes continuos adicionales (que no formen parte del gráfico a iterar) en su misma área. En cortes quebrados adicionales en la misma área, sólo pueden iterarse gráficos cuyos subgráficos mínimos están todos rodeados por algún corte quebrado del gráfico. Aquí “subgráficos mínimos” se refiere a las letras y a las áreas vacías limitadas por un solo corte.



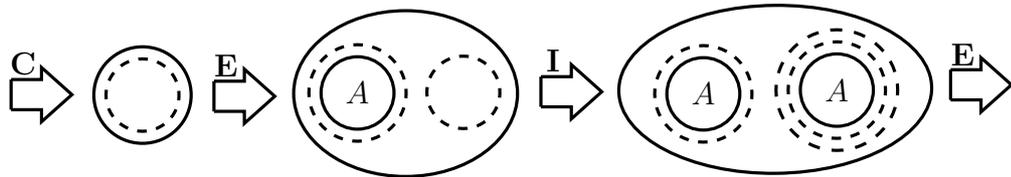
No se puede iterar por cortes quebrados los gráficos siguientes:

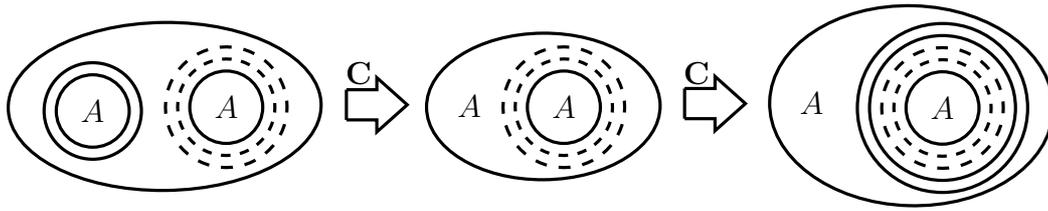


- **Desiteración (D):** Cualquier gráfico que pueda ser resultado de una iteración permitida en la regla anterior, puede borrarse.
- **Corte doble (C):** Un corte doble continuo puede borrarse o escribirse alrededor de cualquier gráfico, en cualquier área. Un corte doble necesario y vacío puede borrarse o escribirse en cualquier área.

El siguiente ejemplo de transformación de gráficos corresponde al axioma modal **B**, que establece la diferencia entre los sistemas S_4 y S_5 .

Ejemplo 3.7. $\Rightarrow A \rightarrow \Box \Diamond A$.





3.2. Libros de Peirce-Kripke

Los diferentes sistemas de gráficos existenciales se desarrollan siempre sobre *una* hoja de aserción. Sin embargo el creador de estos diagramas, Charles Peirce, en cierto momento concibió la posibilidad de considerar varias hojas de manera simultánea. En efecto, en [20, Vol. 4, §512] Peirce escribió:

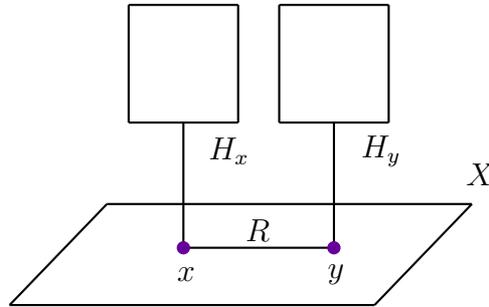
“Pero en la parte Gama del asunto todas las clases antiguas de signos toman formas nuevas... Así, en vez de una hoja de aserción tenemos un libro de hojas separadas, unidas en ciertos puntos, o conectadas de otra manera. Pues nuestra hoja Alfa, como un todo, representa simplemente un universo de individuos existentes y las diferentes partes de la hoja representan hechos o aserciones verdaderas hechas respecto a ese universo. En los cortes pasamos a otras áreas, áreas de proposiciones imaginadas que no se han realizado.”

Esta idea se puede concretar combinándola con los modelos de Kripke, inventados unos 45 años después de la muerte de Peirce. En efecto, la idea de “conectar de otra manera” diferentes hojas de aserción se puede realizar mediante una relación binaria cualquiera entre las hojas. Imitando la idea de los modelos de Kripke se puede tomar un conjunto base cuyos elementos representan las hojas y en el cual se define la relación.

De esta forma, los gráficos existenciales permiten construir un modelo de Kripke de la siguiente manera: Dado cualquier marco modal (X, R) , a cada elemento $x \in X$ se asocia una hoja de aserción en la cual, teniendo en cuenta la semántica de los gráficos, todo lo que se escriba sobre ella se interpreta como verdadero y resulta asociado de forma natural al elemento $x \in X$. Como tal, esta noción es del todo novedosa.

Definición 3.8. Un libro de Peirce-Kripke consiste en un conjunto no vacío X dotado de una relación binaria R , además a cada elemento $x \in X$ se asocia una hoja de aserción H_x .

De manera gráfica:

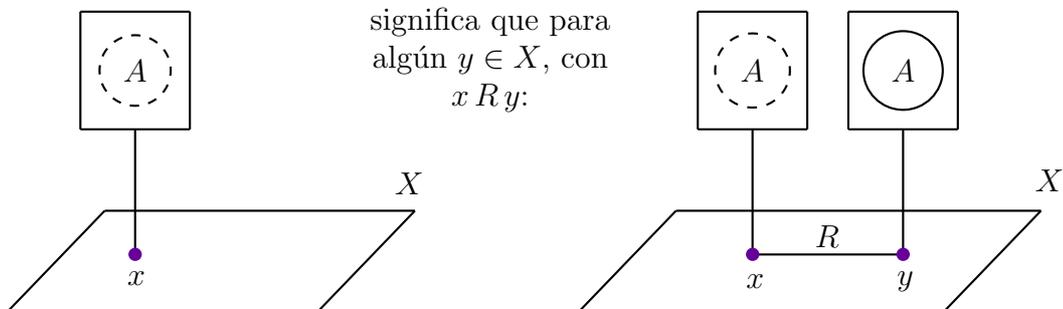


Sobre cada hoja de aserción H_x se pueden desarrollar gráficos existenciales Alfa o Beta. En el enfoque de este trabajo inicial, y además siguiendo la idea del mismo Peirce en la cita mencionada arriba, aquí solo se considerarán gráficos Alfa en cada hoja.

En este contexto se puede dar al corte quebrado una interpretación muy natural, pasando así de los gráficos Alfa a los gráficos Gama modales. Pues si se piensa que las hojas son *semitransparentes*, entonces un corte quebrado o borroso significa que hay un corte en alguna hoja posterior. Esta es la única definición básica requerida.

Definición 3.9. En el libro de Peirce-Kripke sobre un conjunto (X, R) , escribir un corte quebrado sobre una hoja de aserción H_x (no rodeado por ningún otro corte sobre esa hoja) significa que para algún elemento $y \in X$ con $x R y$ ese mismo corte está escrito continuo, con todo su contenido, sobre la hoja H_y .

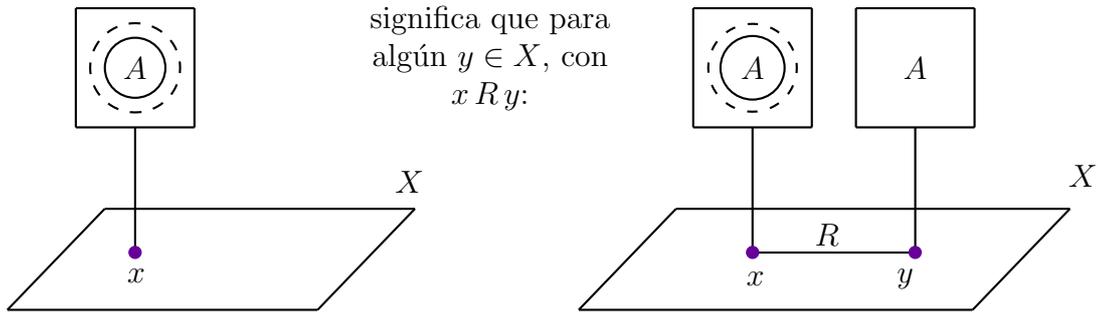
De manera gráfica:



Esta interpretación básica permite interpretar los dos cortes doble modales básicos.

Afirmación 3.10. *En el libro de Peirce-Kripke sobre un conjunto (X, R) , escribir un corte doble posible sobre una hoja de aserción H_x (no rodeado por ningún otro corte sobre esa hoja) significa que para algún elemento y con $x R y$ el contenido del corte doble posible está escrito sobre la hoja H_y .*

De manera gráfica:



Demostración. Aplicar la definición 3.9 al gráfico



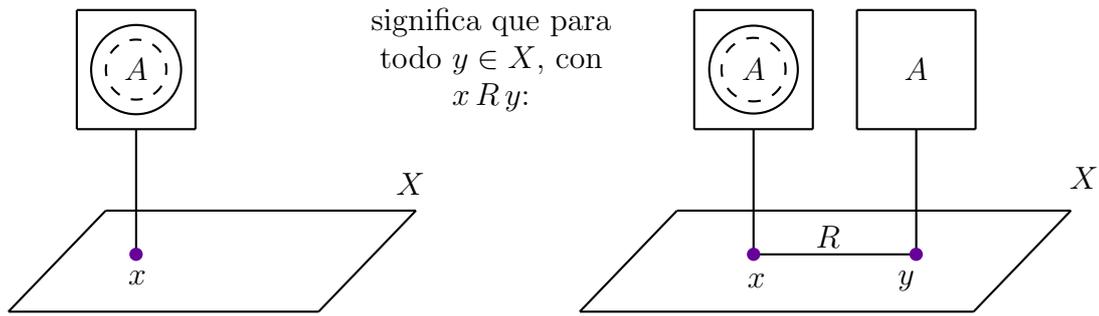
y luego aplicar la regla de corte doble a



en la hoja de aserción H_y . □

Afirmación 3.11. *En el libro de Peirce-Kripke sobre un conjunto (X, R) , escribir un corte doble necesario sobre una hoja de aserción H_x (no rodeado por ningún otro corte sobre esa hoja) significa que para todo elemento y con $x R y$ el contenido del corte doble necesario está escrito sobre la hoja H_y .*

De manera gráfica:



significa que para todo $y \in X$, con $x R y$:

Demostración. Teniendo en cuenta que el corte continuo significa la negación, encerrar el gráfico



en la hoja H_x significa negar la definición 3.9, es decir, que para todo $y \in X$ con $x R y$ en la hoja H_y se tiene la negación de



que es el gráfico siguiente:



De nuevo, por la regla de corte doble en H_y se obtiene el gráfico A en esta hoja, para cada y con $x R y$. □

De esta manera la interpretación básica y novedosa del corte quebrado propuesta en la definición 3.9 es perfectamente coherente con la construcción tradicional de los modelos de Kripke para la lógica modal. Más aún, se tiene el resultado siguiente:

Teorema 3.12. *Con las topologías detalladas en la sección 2.3.2, todo libro de Peirce-Kripke es un fibrado sobre el conjunto base y , en consecuencia, se le asocia un haz y un espacio étale natural.*

Demostración. Esto es una consecuencia directa del teorema 2.30. □

3.3. Reglas para los libros de Peirce-Kripke

En esta última sección se busca obtener las reglas de transformación Gama de manera natural en los libros de Peirce-Kripke definidos en el apartado anterior. Las reglas Alfa se tienen de manera homogénea en cada hoja, el problema radica en la adaptación de las reglas al corte quebrado. Para esta tarea solo se cuenta con la definición 3.9 y las afirmaciones 3.10 y 3.11.

En todos los sistemas de gráficos existenciales las reglas se simplifican de manera considerable mediante un resultado que Peirce llamó el *teorema de contraposición*.

Lema 3.13. *Dado un libro de Peirce-Kripke, sean A, B gráficos Gama. Si $A \Rightarrow B$ en cada hoja H_x entonces:*

- i) $\textcircled{B} \Rightarrow \textcircled{A}$ en cada hoja H_x ;
- ii) $\textcircled{\textcircled{B}} \Rightarrow \textcircled{\textcircled{A}}$ en cada hoja H_x .

Demostración.

i) Si la deducción de B a partir de A se realiza totalmente en una misma hoja H_x entonces en ella solo se emplean reglas Alfa, luego por el teorema de contraposición para gráficos Alfa se tiene $\textcircled{B} \Rightarrow \textcircled{A}$ en cualquier hoja H_x . La situación más compleja se presenta cuando en cierto paso la deducción se traslada de la hoja H_x a otra hoja H_y con $x R y$, empleando la definición 3.9 o bien las afirmaciones 3.10 y 3.11. Este fenómeno podría ocurrir varias veces dentro de una deducción, pero para la demostración de este lema basta considerar que esto sucede solo una vez, con las hipótesis que siguen.

- $x R y$;
- el gráfico A en H_x corresponde al gráfico A' en la hoja H_y ;
- el gráfico B en H_x corresponde al gráfico B' en la hoja H_y ;
- en la hoja H_y se tiene $A' \Rightarrow B'$ con reglas Alfa, se nota que esta deducción es válida en cualquier hoja del libro.

Ahora para la “correspondencia” respectiva entre A y A' , B y B' se abren cuatro casos.

- a) Supóngase que $A = \textcircled{\textcircled{C}}$ y $A' = \textcircled{C}$ para algún gráfico C , lo cual corresponde a la definición 3.9 o a la afirmación 3.10, y que $B = \textcircled{\textcircled{D}}$ y $B' = \textcircled{D}$ para algún D .

En estas condiciones, $\textcircled{B} = \textcircled{\textcircled{D}}$ en H_x expresa que se tiene el gráfico D en toda hoja H_z con $x R z$. Pero por hipótesis se tiene $A' \Rightarrow B'$ con las reglas Alfa, es decir $\textcircled{C} \Rightarrow \textcircled{D}$, luego por el teorema de contraposición Alfa y la regla de Corte doble resulta $D \Rightarrow C$. Como esta deducción se puede realizar en cualquier hoja del libro, se obtiene el gráfico C en cada H_z con $x R z$. De esta manera, en la hoja H_x resulta $\textcircled{\textcircled{C}} = \textcircled{A}$.

- b) Supóngase de nuevo que $A = \textcircled{\textcircled{C}}$ y $A' = \textcircled{C}$ para algún gráfico C , mientras que $B = \textcircled{\textcircled{B'}}$, lo cual corresponde a la afirmación 3.11.

Nótese que en este caso el gráfico \textcircled{C} en *una* hoja H_y con $x R y$ implica el gráfico B' en *todas* las hojas tales. Además en cualquier hoja del libro se tiene $\textcircled{C} \Rightarrow B'$ con reglas Alfa, luego por el teorema de contraposición y la regla de Corte doble resulta $\textcircled{B'} \Rightarrow C$. Ahora en H_x el gráfico \textcircled{B} equivale a $\textcircled{\textcircled{B'}}$, es decir $\textcircled{B'}$ en *alguna* hoja H_z con $x R z$, lo cual por todo lo anterior permite obtener el gráfico C en *toda* hoja H_y . Y así se obtiene el gráfico $\textcircled{\textcircled{C}} = \textcircled{A}$ en la hoja H_x .

- c) Supóngase que $A = \textcircled{\textcircled{A'}}$ y que $B = \textcircled{\textcircled{D}}$ y $B' = \textcircled{D}$ para algún gráfico D .

Como en el caso (a), a partir de \textcircled{B} se tiene el gráfico D en toda hoja H_z con $x R z$ luego, en particular, se tiene en la hoja H_y . Ahora $A' \Rightarrow B'$ es $A' \Rightarrow \textcircled{D}$ luego, por el teorema de contraposición Alfa y la regla de Corte doble, del gráfico D se obtiene $\textcircled{A'}$. Por la definición 3.9 resulta $\textcircled{\textcircled{A'}}$ en la hoja H_x , y por la regla de Corte doble este gráfico equivale a \textcircled{A} .

- d) Por fin, supóngase que $A = \textcircled{\textcircled{A'}}$ y que $B = \textcircled{\textcircled{B'}}$.

En este caso el gráfico \textcircled{B} equivale a $\textcircled{\textcircled{B'}}$ luego en alguna hoja H_z con $x R z$ se tiene el gráfico $\textcircled{B'}$. Puesto que en cualquier hoja se tiene $A' \Rightarrow B'$ con reglas

Alfa, por el teorema de contraposición en ese sistema se obtiene $\textcircled{A'}$ en H_z . Luego por la definición 3.9 resulta $\textcircled{A'}$ en H_x , que allí equivale a \textcircled{A} .

ii) Si en la hoja H_x se tiene el gráfico \textcircled{B} entonces, por la definición 3.9, para alguna hoja H_y con $x R y$ se tiene \textcircled{B} . Por hipótesis y la parte (i) de este lema, en esa hoja H_y se obtiene \textcircled{A} y, de nuevo por la definición 3.9, en la hoja H_x resulta \textcircled{A} . \square

Teorema 3.14 (Teorema de contraposición). *Dado un libro de Peirce-Kripke, sean A , B gráficos Gama. Si $A \Rightarrow B$ en cada hoja H_x , entonces en cualquier hoja H_x y para todo gráfico Gama que los contenga se cumple lo siguiente.*

- En cada área par el gráfico A se puede transformar en B .
- En cada área impar el gráfico B se puede transformar en A .

Demostración. Una prueba rigurosa requiere de inducción matemática sobre la cantidad n de cortes que rodean el subgráfico A o B . Aquí, en cambio, se muestran los primeros pasos para ilustrar el proceso.

Si $A \Rightarrow B$ en cada hoja H_x , evidentemente también se tiene lo siguiente para cualquier gráfico C .

$$n = 0 \left\{ \begin{array}{l} AC \Rightarrow BC \end{array} \right.$$

Por el lema 3.13 se sigue

$$\begin{array}{c} \textcircled{BC} \Rightarrow \textcircled{AC} \\ \textcircled{BC} \Rightarrow \textcircled{AC} \end{array}$$

de donde, para cualquier gráfico D , se obtiene lo siguiente.

$$n = 1 \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{BC} D \Rightarrow \textcircled{AC} D \\ \textcircled{BC} D \Rightarrow \textcircled{AC} D \end{array} \right.$$

De nuevo por el lema 3.13 aplicado a las transformaciones anteriores, y añadiendo un gráfico E , se obtienen las cuatro deducciones que siguen.

$$n = 2 \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \left(\text{---} (AC) D \text{---} \right) E \Rightarrow \text{---} \left(\text{---} (BC) D \text{---} \right) E \\ \text{---} \left(\text{---} (AC) D \text{---} \right) \text{---} E \Rightarrow \text{---} \left(\text{---} (BC) D \text{---} \right) \text{---} E \\ \text{---} \left(\text{---} (AC) \text{---} D \text{---} \right) E \Rightarrow \text{---} \left(\text{---} (BC) \text{---} D \text{---} \right) E \\ \text{---} \left(\text{---} (AC) \text{---} D \text{---} \right) \text{---} E \Rightarrow \text{---} \left(\text{---} (BC) \text{---} D \text{---} \right) \text{---} E \end{array} \right.$$

En general, para cada n resultan 2^n posibles combinaciones de cortes continuos y quebrados alrededor de A o B . Sin embargo no es necesario considerar más y más pasos pues el caso $n = 2$ muestra que al añadir dos cortes, de cualquier tipo, el orden de la deducción se conserva. Como en el caso $n = 0$ se tiene el sentido original de la demostración, en todos los casos pares $n = 2k + 0$ se conserva el orden de la deducción. Por otro lado, en el caso $n = 1$ el orden de la deducción se invierte, luego en todos los casos impares $n = 2k + 1$ se invierte el orden de la demostración. \square

En lo que sigue se considera que el gráfico A es equivalente a B , lo cual se denota $A \equiv B$, si $A \Rightarrow B$ y también $B \Rightarrow A$.

Corolario 3.15. *Dado un libro de Peirce-Kripke, sean A, B gráficos Gama. Si $A \equiv B$ en cada hoja H_x , entonces en cualquier hoja H_x y en cada área par o impar que los contenga el gráfico A se puede transformar en B o viceversa.*

Demostración. Como $A \Rightarrow B$, por el teorema 3.14 el gráfico A se puede transformar en B en cualquier área par; como $B \Rightarrow A$, en cualquier área par se puede transformar B en A . En el otro sentido: como $B \Rightarrow A$, por el teorema 3.14 en cualquier área impar el gráfico A se puede transformar en B ; como $A \Rightarrow B$, en cualquier área impar B se puede transformar en A . \square

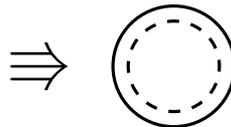
Este resultado tiene una consecuencia interesante para las tautologías, que corresponden a gráficos que se pueden construir en la hoja vacía, lo cual en los enunciados generales se denotará $\square \Rightarrow A$.

Corolario 3.16. *Dado un libro de Peirce-Kripke, sea A un gráfico Gama. Si $\square \Rightarrow A$ en cada hoja H_x , entonces este gráfico A se puede escribir o borrar en cualquier área y en cada hoja H_x .*

Demostración. Por la regla de Borramiento Alfa siempre $A \Rightarrow \square$, luego en realidad $A \equiv \square$. Por el corolario 3.15, en cualquier área y en cada hoja se puede pasar de A a un área vacía (borrar el gráfico A) o viceversa (escribir el gráfico A). \square

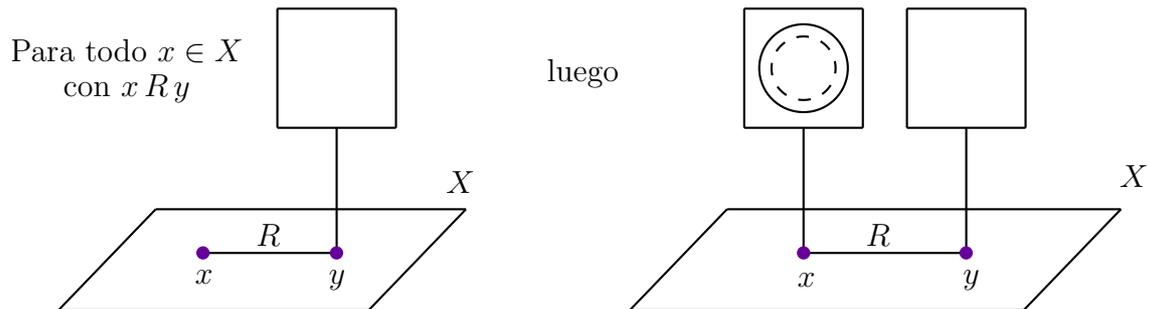
3.3.1. Corte doble

Lema 3.17. *En un libro de Peirce-Kripke, en cada hoja H_x se tiene:*



Demostración. Para cada y con $x R y$ se tiene un área vacía en la hoja H_y . Por la afirmación 3.11, en la hoja H_x se tiene el área vacía rodeada por un corte doble necesario.

De manera gráfica:



\square

Teorema 3.18. *En todo libro de Peirce-Kripke y en cada hoja es válida la regla de Corte doble Gama, como se expresa en la sección 3.1.4.*

Demostración. La escritura o borramiento de un corte doble continuo alrededor de un gráfico se tiene por las reglas Alfa en cada hoja. La escritura o borramiento del corte doble necesario vacío se tiene por el lema 3.17 y por el corolario 3.16. \square

3.3.2. Borramiento y Escritura

Lema 3.19. *Si en un libro de Peirce-Kripke sobre (X, R) se tiene $x R x$ para algún $x \in X$, entonces en la hoja H_x se cumple*



para cualquier gráfico A .

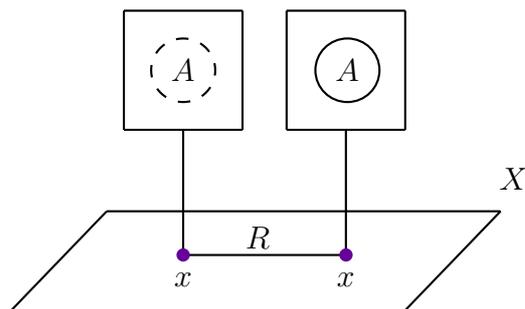
Demostración. Como $x R x$ y en H_x (segunda componente x) se tiene



por la definición 3.9 en el mismo H_x (primera componente x) se tiene lo siguiente.



De manera gráfica:



\square

Teorema 3.20. *En un libro de Peirce-Kripke sobre (X, R) con relación R reflexiva son válidas las reglas de Borramiento y Escritura, como se expresaron en la sección 3.1.4.*

Demostración. Puesto que la relación R es reflexiva, por el lema 3.19 se tienen las siguientes deducciones en cualquier hoja H_x .

$$\begin{array}{ccc}
 A B & \Rightarrow & A \\
 \bigcirc A & \Rightarrow & \bigcirc\!\!\!\!-\! A
 \end{array}$$

Por el teorema 3.14, en cualquier área par y cualquier hoja se pueden realizar estas deducciones, lo cual comprende la regla de Borramiento Gama. Por el mismo teorema 3.14, en cualquier área impar y cualquier hoja se pueden realizar las deducciones siguientes

$$\begin{array}{ccc}
 A & \Rightarrow & A B \\
 \bigcirc\!\!\!\!-\! A & \Rightarrow & \bigcirc A
 \end{array}$$

Esto comprende la regla de Escritura para los sistemas Gama modales. □

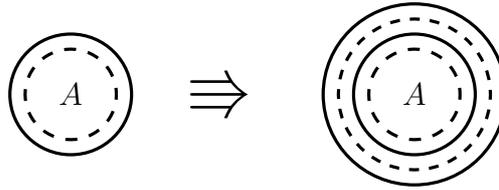
3.3.3. Iteración y Desiteración

En los libros de Peirce-Kripke se puede ver con mayor claridad el impedimento para la iteración o desiteración de un gráfico a través de un corte quebrado. En este contexto el meollo del asunto radica en que el corte quebrado no está en la misma hoja donde se trabaja, sino en alguna hoja posterior. Por lo tanto el gráfico que se va a iterar o desiterar también debe existir en ese futuro, y la manera más segura de garantizarlo es que ese gráfico sea también necesario en la hoja original. Esta reflexión conduce al problema de la transferencia de gráficos hacia hojas posteriores.

A continuación se desarrollan las reglas de Iteración y Desiteración para libros de Peirce-Kripke correspondientes a los tres sistemas presentados en la sección 3.1.4, que son los mismos sistemas desarrollados por Zeman [18, 29, 31].

A. Reglas de transformación Gama para S_4

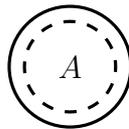
Lema 3.21. *Supóngase que en un libro de Peirce-Kripke sobre (X, R) y cierto elemento $x \in X$ se tiene que para cada y con $x R y$ y cada z con $y R z$ también se cumple $x R z$. Entonces en la hoja H_x se cumple*



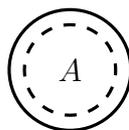
para cualquier gráfico A .

Esta condición sobre R se cumple en todo $x \in X$ si y solo si la relación R es transitiva. El significado de este resultado es que todo gráfico necesario es, a su vez, necesario. En otras palabras, el gráfico original \textcircled{A} , dado en la hoja H_x , también se tiene en toda hoja H_y tal que $x R y$.

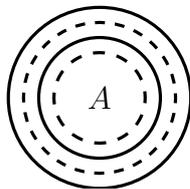
Demostración. Sea $y \in X$ tal que $x R y$. Para cada z con $y R z$, por hipótesis también $x R z$ luego como en H_x se tiene el gráfico



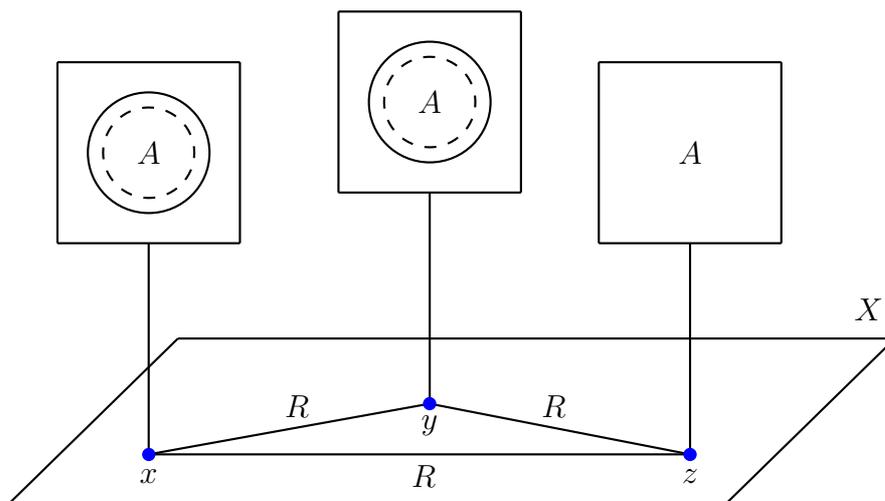
entonces por la afirmación 3.11 en la hoja H_z se tiene el gráfico A . Como esto se cumple para cada $z \in X$ con $y R z$, por la misma afirmación 3.11 se tiene en la hoja H_y el gráfico siguiente.



Puesto que esto se satisface para todo y con $x R y$, se concluye por la afirmación 3.11 que en la hoja x se tiene el gráfico que sigue.



De manera gráfica:



□

Nótese que el lema anterior está relacionado con el ejemplo 3.5 que muestra gráficamente el axioma modal 4, característico de la lógica modal S_4 .

Teorema 3.22. *En cada hoja de un libro de Peirce-Kripke sobre un conjunto (X, R) con relación R reflexiva y transitiva son válidas las reglas de Iteración y Desiteración Gama, como se expresan en el apartado A de la sección 3.1.4.*

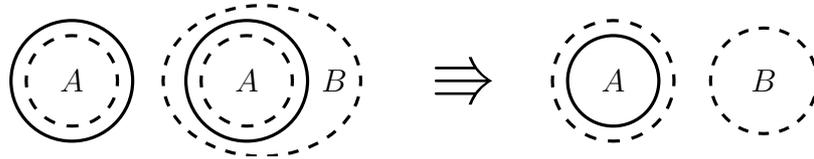
Es decir, esta conclusión se tiene cuando R es una relación de preorden.

Demostración.

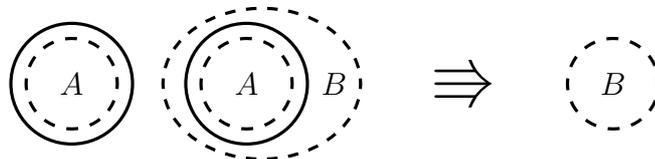
i) La iteración en la misma área y a través de cortes continuos se tiene por las reglas Alfa en cada hoja. Para la iteración por cortes quebrados contenidos en un área par,

basta observar que tal corte encierra un área impar y por tanto el gráfico se puede dibujar usando la regla de Escritura establecida en el teorema 3.20. Por fin, la iteración a través de cortes quebrados contenidos en un área impar se puede lograr usando el teorema de contraposición (teorema 3.14) aplicado a la desiteración que se demuestra a continuación.

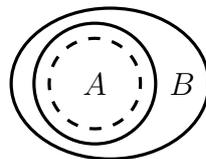
ii) La desiteración en la misma área y a través de cortes continuos se cumple por las reglas Alfa. Para la desiteración por cortes quebrados contenidos en un área impar, basta observar que tal corte encierra un área par y por tanto el gráfico se puede eliminar usando la regla de Borramiento establecida en el teorema 3.20. Por fin, por el teorema de contraposición (teorema 3.14), para la desiteración a través de cortes quebrados contenidos en cualquier área par (y, de paso, para la iteración por cortes quebrados contenidos en área impar) basta probar lo siguiente en cada hoja H_x .



Para esto, a su vez es suficiente demostrar la siguiente transformación.



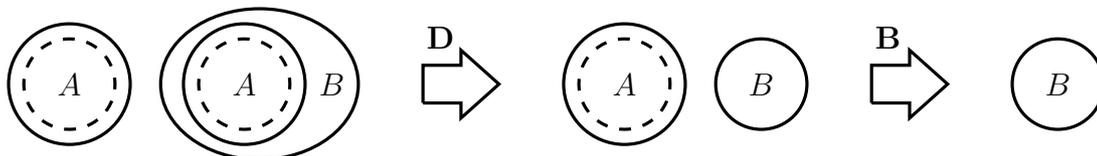
Por la definición 3.9, el corte quebrado en la hoja H_x significa que en alguna hoja H_y con $x R y$ se tiene el gráfico siguiente.



Teniendo en cuenta que R es una relación transitiva, por el lema 3.21 en esta hoja H_y también se tiene el siguiente gráfico necesario.



Por lo tanto, en la hoja H_y se pueden realizar las siguientes transformaciones Alfa.



Por fin, como $x R y$, por la definición 3.9 en la hoja H_x se tiene el gráfico siguiente, que es el buscado.

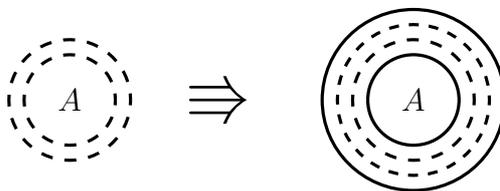


□

Corolario 3.23. *En un libro de Peirce-Kripke sobre un conjunto (X, R) con relación R reflexiva y transitiva son válidas todas las reglas de transformación Gama para la lógica S_4 , como se expresan en el apartado A de la sección 3.1.4.*

B. Reglas de transformación Gama para $S_{4.2}$

Lema 3.24. *Supóngase que en un libro de Peirce-Kripke sobre (X, R) y cierto elemento $x \in X$ se tiene que para cada y, z tales que $x R y, x R z$ existe un elemento u tal que $y R u, z R u$. Entonces en la hoja H_x se cumple*



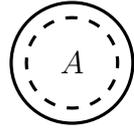
para cualquier gráfico A .

Esta condición sobre R se cumple en todo $x \in X$ si y solo si la relación R es convergente.

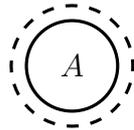
Demostración. Sea $y \in X$ tal que $x R y$. Como en H_x se tiene



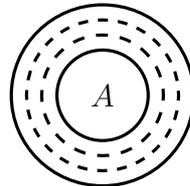
entonces para algún z con $x R z$ se tiene el gráfico siguiente en la hoja H_z .



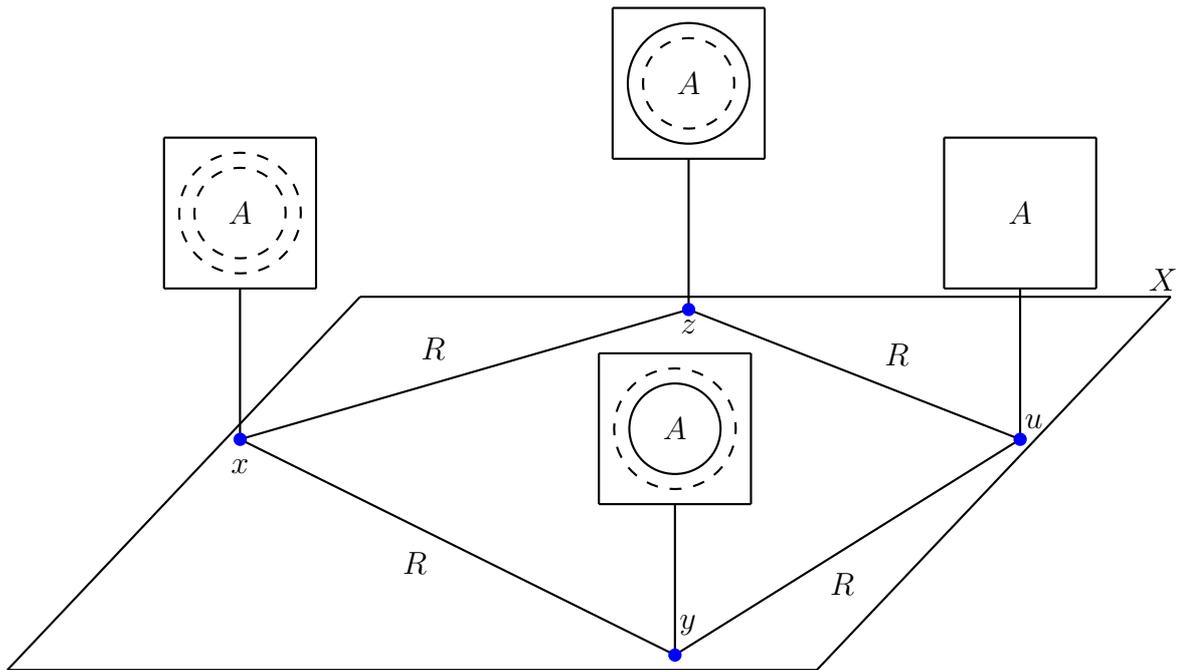
Ahora, por la hipótesis sobre la relación R existe $u \in X$ tal que $y R u$ y $z R u$. Por la afirmación 3.11, del gráfico anterior se obtiene el gráfico A en H_u ; luego, por la afirmación 3.10 se obtiene el siguiente gráfico en H_y .



Como esto se cumple para cada $y \in X$ con $x R y$, se concluye por la afirmación 3.11 que en la hoja H_x se tiene el gráfico que sigue.



De manera gráfica:



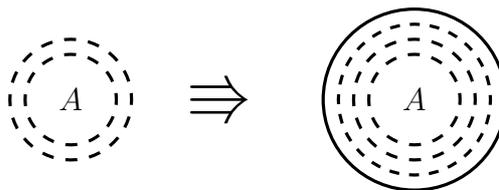
□

El lema anterior está relacionado con el ejemplo 3.6 que muestra gráficamente el axioma modal **G**, característico de la lógica modal $S_{4.2}$. Sin embargo, se nota que no es con exactitud lo que se requiere para las reglas de Iteración y Desiteración, donde se debe garantizar la permanencia del corte doble necesario en hojas posteriores. Para ello se requiere solo un pequeño ajuste.

Lema 3.25. *Supóngase que en un libro de Peirce-Kripke sobre (X, R) y cierto elemento $x \in X$ se tiene:*

- i) Para cada y, z tales que $x R y, x R z$ existe un elemento u tal que $y R u, z R u$;*
- ii) Para cada z tal que $x R z$ se tiene que si $z R v, v R w$ para algunos v, w entonces también $z R w$.*

Entonces en la hoja H_x se cumple



para cualquier gráfico A .

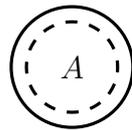
Estas dos condiciones se cumplen si la relación R es transitiva y convergente.

El significado de este hecho es que todo gráfico posiblemente necesario es también necesario. En otras palabras, el gráfico original \textcircled{A} , dado en la hoja H_x , también se tiene en toda hoja H_y tal que $x R y$.

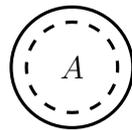
Demostración. Sea $y \in X$ tal que $x R y$. Como en H_x se tiene



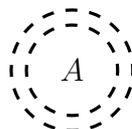
entonces para algún z con $x R z$ se tiene el gráfico siguiente en la hoja H_z .



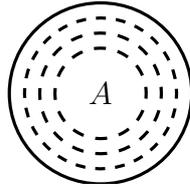
Ahora, por la hipótesis (i) sobre la relación R existe $u \in X$ tal que $y R u$ y $z R u$. Más aún, por la condición (ii) y el lema 3.21, del gráfico anterior se tiene en la hoja H_u el gráfico que sigue.



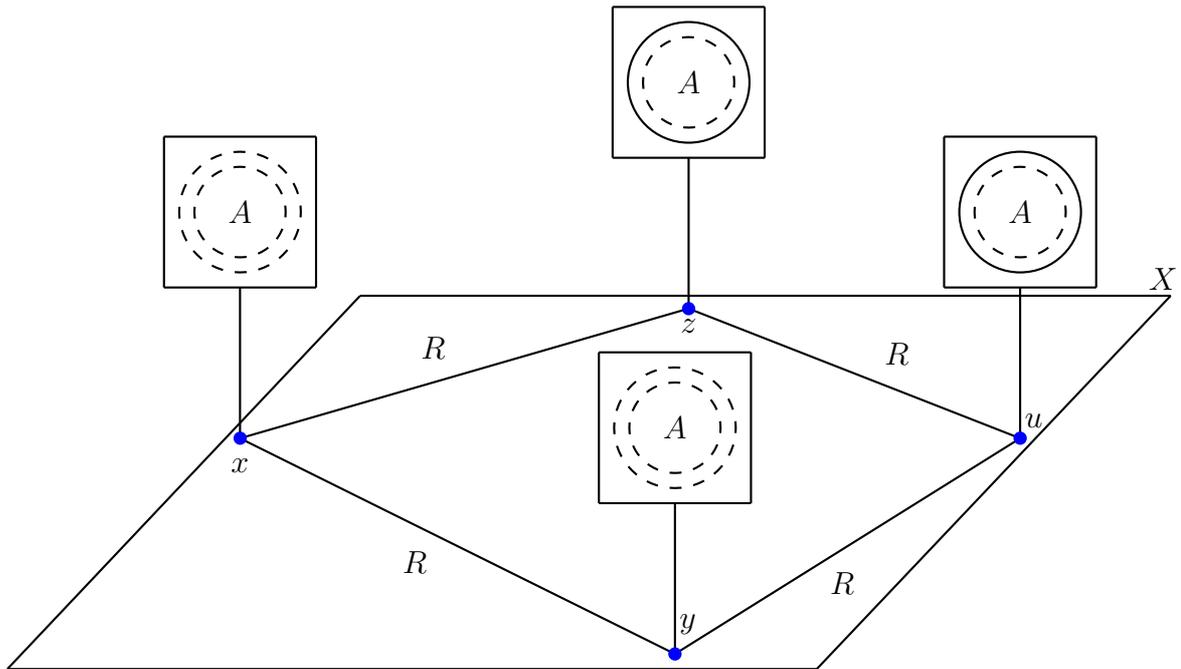
En consecuencia, por la definición 3.9 se obtiene el siguiente gráfico en H_y .



Como esto se cumple para cada $y \in X$ con $x R y$, se concluye por la afirmación 3.11 que en la hoja H_x se tiene el gráfico que sigue y que es el buscado.



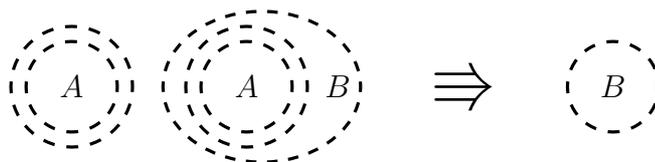
De manera gráfica:



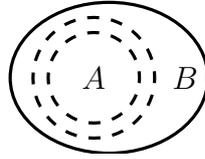
□

Teorema 3.26. *En cada hoja de un libro de Peirce-Kripke sobre un conjunto (X, R) con relación R reflexiva, transitiva y convergente son válidas las reglas de Iteración y Desiteración Gama, como se expresan en el apartado B de la sección 3.1.4.*

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.22 y su demostración, basta considerar la desiteración de un corte doble quebrado a través de un corte quebrado, lo cual a su vez se reduce a probar en cada hoja H_x la siguiente transformación.



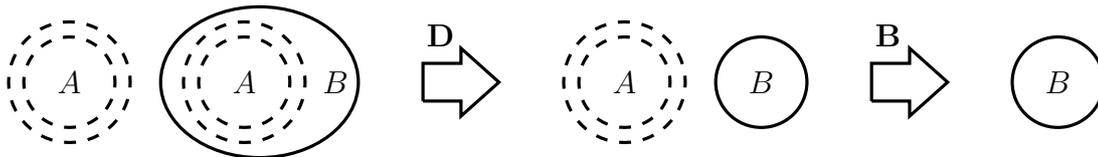
Por la definición 3.9, el corte quebrado en la hoja H_x significa que en alguna hoja H_y con $x R y$ se tiene el gráfico siguiente.



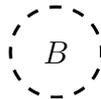
Teniendo en cuenta que R es una relación transitiva y convergente, por el lema 3.25 en esta hoja H_y también se tiene el siguiente gráfico.



Por lo tanto, en la hoja H_y se pueden realizar las siguientes transformaciones Alfa.



Por fin, como $x R y$, por la definición 3.9 en la hoja H_x se tiene el gráfico siguiente, que es el buscado.



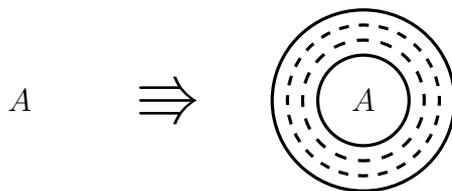
□

Corolario 3.27. *En un libro de Peirce-Kripke sobre un conjunto (X, R) con relación R reflexiva, transitiva y convergente son válidas todas las reglas de transformación Gama para la lógica $S_{4.2}$, como se expresan en el apartado B de la sección 3.1.4.*

C. Reglas de transformación Gama para S_5

Lema 3.28. *Supóngase que en un libro de Peirce-Kripke sobre (X, R) y cierto elemento $x \in X$ se tiene que para cada y tal que $x R y$ también $y R x$. Entonces en la hoja H_x se*

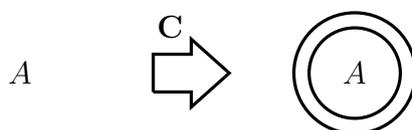
cumple



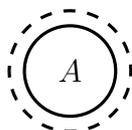
para cualquier gráfico A .

Esta condición sobre R se cumple en todo $x \in X$ si y solo si la relación R es simétrica.

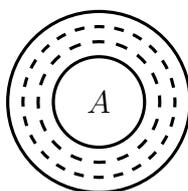
Demostración. En la hoja H_x se puede realizar la siguiente transformación Alfa.



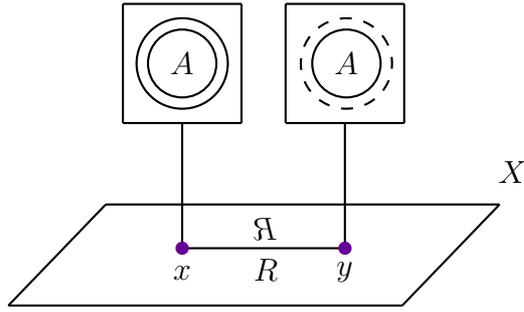
Ahora sea $y \in X$ tal que $x R y$. Por la hipótesis sobre R también se tiene $y R x$ luego por la definición 3.9 en la hoja H_y se tiene el siguiente gráfico.



Puesto que esto sucede para cualquier y con $x R y$, por la afirmación 3.11 en la hoja H_x se tiene el gráfico siguiente, que es el buscado.



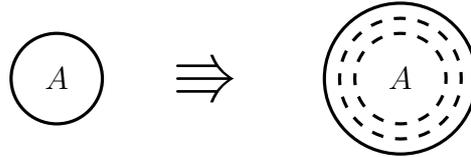
De manera gráfica:



□

El lema anterior está relacionado con el ejemplo 3.7 que muestra gráficamente el axioma modal **B**, uno de los que caracterizan la lógica modal S_5 . Se observa que tiene la siguiente consecuencia inmediata.

Corolario 3.29. *Supóngase que en un libro de Peirce-Kripke sobre (X, R) y cierto elemento $x \in X$ se tiene que para cada y tal que $x R y$ también $y R x$. Entonces en la hoja H_x se cumple*

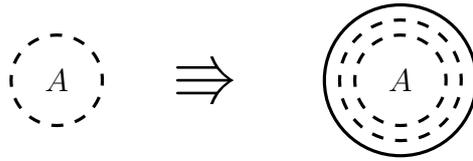


para cualquier gráfico A .

Demostración. Basta sustituir en el lema 3.28 el gráfico A por el gráfico encerrado \textcircled{A} y aplicar la regla de Corte doble. □

El siguiente resultado es muy parecido pero aquí se exige menos en el gráfico inicial que en el corolario 3.29. Esta deducción corresponde al axioma modal **5** que es el más fuerte de estos tres postulados similares.

Lema 3.30. *Supóngase que en un libro de Peirce-Kripke sobre (X, R) y cierto elemento $x \in X$ se tiene que para cada y, z tales que $x R y, x R z$ también se tiene $y R z$. Entonces en la hoja H_x se cumple*



para cualquier gráfico A .

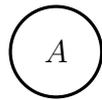
Esta condición sobre R se cumple en todo $x \in X$ si y solo si la relación R es *euclidiana*: $x R y$ y $x R z$ implica $y R z$ para todo x, y, z . Es sencillo probar los hechos siguientes: toda relación simétrica y transitiva es euclidiana; al revés, toda relación euclidiana y reflexiva es simétrica y transitiva.

El significado del lema 3.30 es que todo gráfico cuya negación es posible resulta también necesario. En otras palabras, el gráfico original (A) , dado en la hoja H_x , también se tiene en toda hoja H_y tal que $x R y$. Nótese que esto en realidad equivale a que todo gráfico posible es también necesario.

Demostración. Sea $y \in X$ tal que $x R y$. Como en H_x se tiene



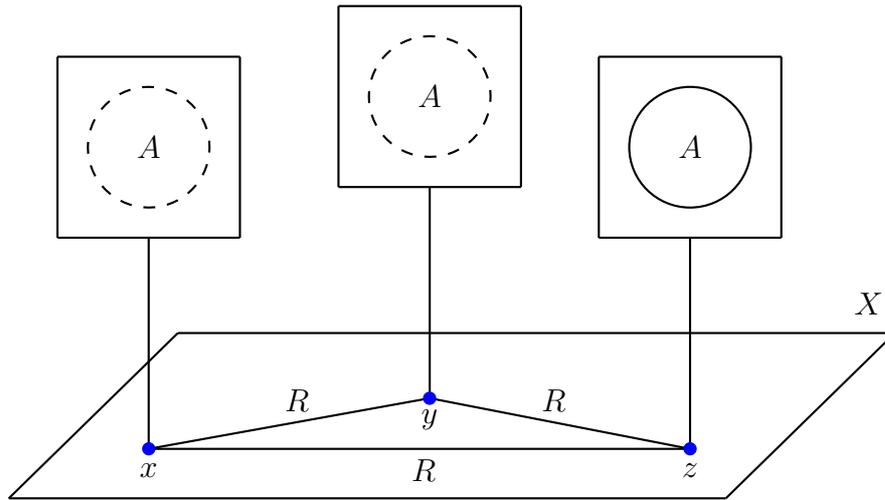
entonces, por la definición 3.9, para algún z con $x R z$ se tiene el gráfico siguiente en la hoja H_z .



Ahora, por la hipótesis sobre la relación R también $y R z$, luego de nuevo por la definición 3.9 se tiene en la hoja H_y el gráfico que sigue y que es el buscado.



De manera gráfica:



□

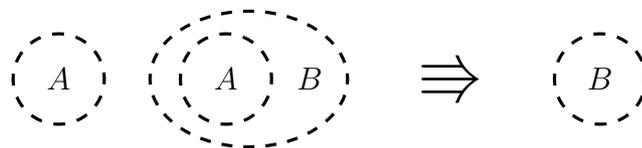
Teorema 3.31. *En cada hoja de un libro de Peirce-Kripke sobre un conjunto (X, R) con relación R reflexiva, simétrica y transitiva son válidas las reglas de Iteración y Desiteración Gama, como se expresan en el apartado C de la sección 3.1.4.*

Es decir, este resultado se tiene cuando R es una relación de equivalencia.

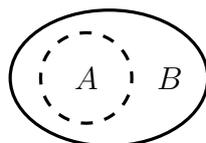
Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 3.22 y su demostración, basta establecer la desiteración de un gráfico con las condiciones indicadas a través de un corte quebrado en cualquier hoja. La prueba de este resultado se construye en cuatro pasos.

1. *Todo gráfico de la forma \textcircled{A} , esto es, un corte quebrado con todo su contenido, se puede desiterar por cortes quebrados en cualquier hoja.*

Al igual que en la demostración del teorema 3.22, la prueba de este hecho (1) se reduce a realizar en cada hoja H_x la siguiente transformación.



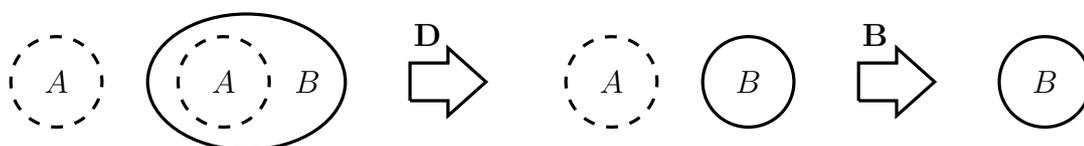
Por la definición 3.9, el corte quebrado en la hoja H_x significa que en alguna hoja H_y con $x R y$ se tiene el gráfico siguiente.



Teniendo en cuenta que R es una relación euclidiana al ser simétrica y transitiva, por el lema 3.30 en esta hoja H_y también se tiene el siguiente gráfico.



Por lo tanto, en la hoja H_y se pueden realizar las siguientes transformaciones Alfa.



Por fin, como $x R y$, por la definición 3.9 en la hoja H_x se tiene el gráfico siguiente, que es el buscado.

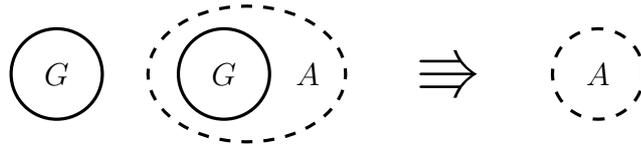


2. Si los gráficos G, H se pueden desiterar por cortes quebrados en cualquier hoja entonces su yuxtaposición, esto es el gráfico GH , también se puede desiterar por cortes quebrados en cualquier hoja.

La prueba de este hecho es inmediata pues se puede desiterar primero un gráfico y luego el otro.

3. Si el gráfico G se puede desiterar por cortes quebrados en cualquier hoja entonces el gráfico rodeado por un corte continuo, esto es \textcircled{G} , también se puede desiterar por cortes quebrados en cualquier hoja.

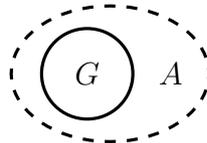
Como antes, la prueba de este hecho (3) se reduce a realizar la siguiente transformación en cada hoja H_x .



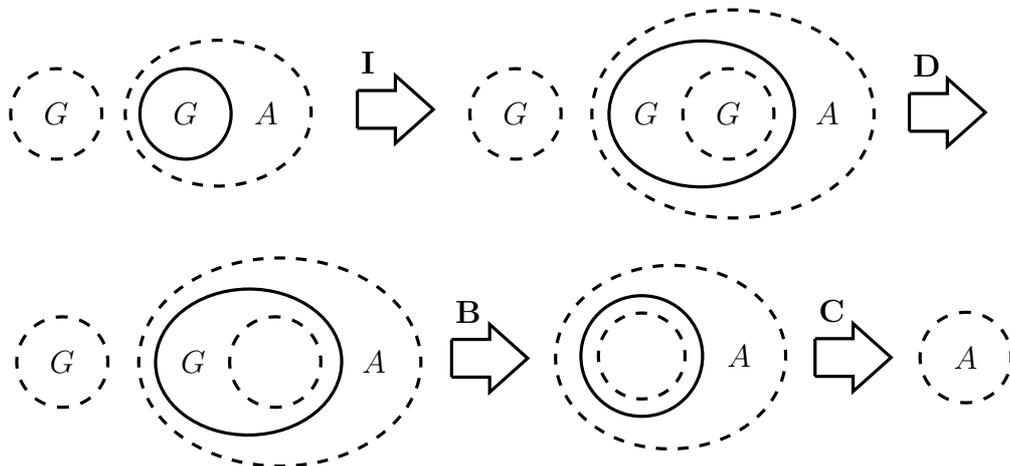
Sea $y \in X$ algún elemento tal que $x R y$, tal elemento existe pues siendo R reflexiva incluso se podría tomar $y = x$. Como R es una relación simétrica también se tiene $y R x$, luego en la hoja H_y se tiene el gráfico siguiente.



Por otro lado, como $x R y$ y teniendo en cuenta que R es una relación euclidiana, por el lema 3.30 en esta hoja H_y también se tiene el siguiente gráfico.



Por lo tanto, en la hoja H_y se pueden realizar las siguientes transformaciones. El primer paso está permitido por el resultado (1) de esta demostración; el segundo por la hipótesis asumida en (3) y el teorema de contraposición (teorema 3.13).



Así, se tiene el gráfico A en la hoja H_y . Pero como $y R x$, de nuevo por el lema 3.30

se tiene este mismo gráfico \textcircled{A} en la hoja H_x , que es el resultado buscado.

4. Todo gráfico cuyos subgráficos mínimos están todos rodeados por algún corte quebrado del mismo gráfico se puede desiterar por cortes quebrados en cualquier hoja.

Pues tal gráfico se obtiene a partir de gráficos rodeados por cortes quebrados combinándolos mediante yuxtaposición, o rodeándolos con cortes continuos, o iterando alguna combinación de estos dos procesos. Por un argumento recurrente, a partir de (1), (2) y (3) todos estos gráficos se pueden desiterar por cortes quebrados. \square

Corolario 3.32. *En un libro de Peirce-Kripke sobre un conjunto (X, R) con relación R reflexiva, simétrica y transitiva son válidas todas las reglas de transformación Gama para la lógica S_5 , como se expresan en el apartado C de la sección 3.1.4.*

Y así, en todos los casos ya clásicos estudiados por Zeman, las reglas de transformación Gama modales se obtienen de manera completamente natural a partir de las propiedades de la relación subyacente al libro de Peirce-Kripke, empleando únicamente la convención para el corte quebrado adoptada en la definición 3.9.

Bibliografía

- [1] Jiří Adámek, Horst Herrlich and George E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*. John Wiley and Sons, New York, 1990.
- [2] A. A. Allam, M. Y. Bakeir and E. A. Abo-Tabl, “Some Methods for Generating Topologies by Relations”. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, Second Series **31** 1 (2008), 35–45.
- [3] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 50. Cambridge University Press, Cambridge 1994.
- [4] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 2: Categories and Structures*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 51. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [5] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 3: Categories of Sheaves*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 52. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [6] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique: Topologie générale*. Chapitres 1 á 4. Hermann, Paris, 1971.
- [7] Patrick Erik Bradley and Norbert Paul, “Using the Relational Model to Capture Topological Information of Spaces”. *The Computer Journal* **53** 1 (2010), 69–89.
- [8] Daniel Francisco Bustos, *Temas de lógica en topos de Grothendieck*. Trabajo de grado, Carrera de Matemáticas. Universidad del Tolima, Ibagué, 2013.
- [9] Xavier Caicedo, *Elementos de Lógica y Calculabilidad*. Una Empresa Docente, Bogotá, 1990.

- [10] Xavier Caicedo, “Lógica de los haces de estructuras”. *Revista Academia Colombiana de Ciencias* **XIX** 74 (1995), 569–586.
- [11] A. Chagrov and M. Zakharyashev, *Modal Logic*. Clarendon Press, Oxford, 1997.
- [12] B. F. Chellas, *Modal Logic: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [13] G. E. Hughes and M. J. Creswell, *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, London, 1996.
- [14] Peter T. Johnstone, *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*. Two volumes. Clarendon Press, Oxford, 2002.
- [15] Derly Katherine López, *Modelos de Kripke para lógicas modales*. Trabajo de grado, Carrera de Matemáticas. Universidad del Tolima, Ibagué, 2013.
- [16] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, New York, 1971.
- [17] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [18] Fabián Augusto Molina, *Correspondencia entre algunos sistemas de lógica modal y los gráficos existenciales Gama de Peirce*. Trabajo de grado, Carrera de Matemáticas. Universidad del Tolima, Ibagué, 2001.
- [19] Arnold Oostra, “Los gráficos existenciales Gama aplicados a algunas lógicas modales intuicionistas”. *Cuadernos de Sistemática Peirceana* **4** (2012), 27–50.
- [20] Charles Sanders Peirce, *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. (Eds.: Charles Hartshorne y Paul Weiss). Six volumes. Harvard University Press, Cambridge (Massachusetts), 1931.
- [21] Yuri Poveda, “Los gráficos existenciales de Peirce en los sistemas Alfa⁰ y Alfa⁰⁰”. *Boletín de Matemáticas* **7** (2000), 5–17.
- [22] Juan Ricardo Prada, *Gráficos existenciales Alfa y teoría de categorías*. Trabajo de grado, Licenciatura en Matemáticas. Universidad del Tolima, Ibagué, 2013.

- [23] Don D. Roberts, *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*. Mouton, The Hague, 1973.
- [24] Gustavo N. Rubiano, *Topología general*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002.
- [25] B. R. Tennison, *Sheaf Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1975.
- [26] Pierre Thibaud, *La lógica de Charles S. Peirce: del álgebra a los gráficos*. Paraninfo, Madrid, 1982.
- [27] Stephen Willard, *General Topology*. Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), 1970.
- [28] Fernando Zalamea, *Lógica Topológica: Una introducción a los gráficos existenciales de Peirce*. Memorias del XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1997.
- [29] Fernando Zalamea, *Los gráficos existenciales peirceanos*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2010.
- [30] Fernando Zalamea, “A Category-Theoretic Reading of Peirce’s System: Pragmatism, Continuity and The Existential Graphs”. En: Matthew Moore (ed.), *New Essays on Peirce’s Mathematical Philosophy*. Open Court, Chicago, 2010, 203–233.
- [31] J. Jay Zeman, *The Graphical Logic of C. S. Peirce*. Ph.D. dissertation. University of Chicago, Chicago, 1964.

PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 1 de 3
	Código: GB-P04-F03
	Versión: 03
	Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Los suscritos:

JUAN RICARDO PRADA	con C.C N°	1.105.676.767
	con C.C N°	

Manifiesto (an) la voluntad de:

Autorizar

No Autorizar **Motivo:**

La consulta en físico y la virtualización de **mi OBRA**, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

Manifestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

Trabajo de grado	<input checked="" type="checkbox"/>	Artículo	<input type="checkbox"/>	Proyecto de Investigación	<input type="checkbox"/>
Libro	<input type="checkbox"/>	Parte de libro	<input type="checkbox"/>	Documento de conferencia	<input type="checkbox"/>
Patente	<input type="checkbox"/>	Informe técnico	<input type="checkbox"/>		
Otro: (fotografía, mapa, radiografía, película, video, entre otros)					<input type="checkbox"/>

<p>PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS</p> <p>AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</p>	Página 2 de 3
	Código: GB-P04-F03
	Versión: 03
	Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 “...**Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable**” y 37 “...**Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro**”. El artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “**los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores**” y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.

Identificación del documento:

Título completo: **GRAFICOS EXISTENCIALES GAMA, MODELOS DE KRIPKE Y HACES**

Trabajo de grado presentado para optar al título de:

Magister en Matemáticas

Proyecto de Investigación correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado “Trabajo de Grado”):

Informe Técnico correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado “Trabajo de Grado”):

Artículo publicado en revista:

Capítulo publicado en libro:

Conferencia a la que se presentó:

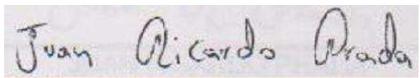
PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 3 de 3
	Código: GB-P04-F03
	Versión: 03
	Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Quienes a continuación autentican con su firma la autorización para la digitalización e inclusión en el repositorio digital de la Universidad del Tolima, el:

Día: **10** Mes: **Septiembre** Año: **2018**

Autores:

Firma

Nombre: JUAN RICARDO PRADA		C.C. 1.105.676.767
Nombre: _____	_____	C.C. _____
Nombre: _____	_____	C.C. _____
Nombre: _____	_____	C.C. _____

El autor y/o autores certifican que conocen las derivadas jurídicas que se generan en aplicación de los principios del derecho de autor.