

# Introducción a las funciones de variable compleja

**Arnold Oostra**

**Luis Eduardo Olivar Robayo**



Universidad  
del Tolima



ACREDITADA  
DE ALTA CALIDAD

*¡Construimos la universidad que soñamos!*



## **Arnold Oostra**

Es Matemático, Magister en Ciencias Matemáticas y Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá. Sus áreas de interés son la lógica, los aportes matemáticos de Charles S. Peirce, el álgebra y la variable compleja. Es autor de múltiples artículos y capítulos de libro. Desde 1996 se desempeña como profesor de planta del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad del Tolima.

# Introducción a las funciones de variable compleja

Arnold Oostra

Luis Eduardo Olivar Robayo



2023

Oostra, Arnold

Introducción a las funciones de variable compleja /

Arnold Oostra, Luis Eduardo Olivar Robayo.

-- 1ª. Ed. -- Ibagué : Sello Editorial Universidad del Tolima,  
2023.

148 p. : il.

Contenido: Los números complejos -- Nociones métricas  
y topológicas -- Funciones de variable compleja --  
Funciones holomorfas -- Integración compleja.

ISBN: 978-628-7537-53-8

1. Funciones analíticas 2. Integrales 3. Números  
complejos I. Título II. Olivar Robayo, Luis Eduardo

**515.73**  
**O59i**

© Universidad del Tolima, 2023

© Arnold Oostra, Luis Eduardo Olivar Robayo

## **Introducción a las funciones de variable compleja**

Primera edición.

ISBN versión electrónica 978-628-7537-53-8

Número de páginas: 148

Ibagué – Tolima – Colombia

Grupo de Matemáticas del Tolima (Grupo-MaT)

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad del Tolima

publicaciones@ut.edu.co

Corrección de estilo, diseño y diagramación: Colors Editores S.A.S.

Ibagué, Tolima – Colombia.

Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción total o parcial de este libro por cualquier medio, sin autorización expresa del titular del derecho de autor.

# Índice general

Prólogo	7
<b>Capítulo 1. Los números complejos</b>	<b>9</b>
1.1. El campo de los números complejos . . . . .	9
1.2. Representación rectangular . . . . .	13
1.3. Representación polar . . . . .	16
1.4. Geometría en el plano complejo . . . . .	22
1.4.1. La recta . . . . .	22
1.4.2. La circunferencia . . . . .	26
1.5. La esfera de Riemann . . . . .	28
1.5.1. Relación de coordenadas de $\mathcal{S}$ y $\mathbb{C}$ . . . . .	29
1.5.2. Distancia en el plano extendido . . . . .	31
Ejercicios . . . . .	36
<b>Capítulo 2. Nociones métricas y topológicas</b>	<b>39</b>
2.1. Topología en el plano . . . . .	39
2.1.1. Métrica y topología . . . . .	39
2.1.2. Conjuntos cerrados . . . . .	41
2.1.3. Compactos y conexos . . . . .	43
2.2. Sucesiones y series complejas . . . . .	45
2.2.1. Sucesiones . . . . .	45
2.2.2. Series . . . . .	48
2.2.3. Algunos criterios de convergencia . . . . .	50
2.2.4. Series de potencias . . . . .	52
Ejercicios . . . . .	53
<b>Capítulo 3. Funciones de variable compleja</b>	<b>55</b>
3.1. Funciones elementales . . . . .	55

3.1.1.	Nociones generales . . . . .	55
3.1.2.	La función lineal . . . . .	56
3.1.3.	La función conjugado . . . . .	58
3.1.4.	La función cuadrática . . . . .	59
3.2.	Las transformaciones de Möbius . . . . .	60
3.2.1.	Funciones racionales . . . . .	60
3.2.2.	La función inverso multiplicativo . . . . .	61
3.2.3.	Transformaciones de Möbius . . . . .	62
3.3.	La función exponencial . . . . .	65
3.4.	Las funciones trigonométricas . . . . .	70
3.5.	El logaritmo complejo . . . . .	74
	Ejercicios . . . . .	79
<b>Capítulo 4.</b>	<b>Funciones holomorfas</b>	<b>83</b>
4.1.	Límites, continuidad y la derivada compleja . . . . .	83
4.2.	Las ecuaciones de Cauchy-Riemann . . . . .	89
4.3.	Funciones holomorfas . . . . .	95
4.4.	Funciones armónicas . . . . .	99
	Ejercicios . . . . .	101
<b>Capítulo 5.</b>	<b>Integración compleja</b>	<b>105</b>
5.1.	Curvas en el plano complejo . . . . .	105
5.2.	Integral de una función de variable compleja . . . . .	111
5.3.	Propiedades de la integral . . . . .	116
5.4.	El teorema de Cauchy . . . . .	122
5.5.	La fórmula integral de Cauchy . . . . .	133
	Ejercicios . . . . .	138
	<b>Bibliografía</b>	<b>141</b>
	<b>Índice de palabras</b>	<b>145</b>
	<b>Índice de símbolos</b>	<b>147</b>

# Índice de figuras

<b>Figura 1.</b>	Representación gráfica de suma y resta de dos números complejos . . . . .	14
<b>Figura 2.</b>	Representación polar de un complejo y su conjugado . . . . .	17
<b>Figura 3.</b>	Producto de dos números complejos . . . . .	19
<b>Figura 4.</b>	Pentágono con vértices las raíces quintas de $i$ . . . . .	22
<b>Figura 5.</b>	Mediatriz de la recta determinada por $z_1$ y $z_2$ . . . . .	25
<b>Figura 6.</b>	La circunferencia de Apolonio . . . . .	27
<b>Figura 7.</b>	Representación esférica del plano extendido . . . . .	29
<b>Figura 8.</b>	Proyecciones estereográficas de círculos en el plano extendido . . . . .	35
<b>Figura 9.</b>	Representación de una función compleja . . . . .	56
<b>Figura 10.</b>	Partes imaginaria y real de la función $f(z) = z^2$ . . . . .	59
<b>Figura 11.</b>	Imágenes de rectas y un rectángulo mediante la función $f(z) = z^2$ . . . . .	59
<b>Figura 12.</b>	Imagen de una recta por la función $f(z) = \frac{1}{z}$ . . . . .	62
<b>Figura 13.</b>	Imágenes de rectas por la función $f(z) = e^z$ . . . . .	69
<b>Figura 14.</b>	Imágenes de rectas por la función $f(z) = \operatorname{sen} z$ . . . . .	74
<b>Figura 15.</b>	Función $f(z) = \log z$ . . . . .	79
<b>Figura 16.</b>	Independencia de las trayectorias . . . . .	124
<b>Figura 17.</b>	Sentido de las curvas . . . . .	125
<b>Figura 18.</b>	División del triángulo . . . . .	128
<b>Figura 19.</b>	Dominio estrella . . . . .	133



# Prólogo

Además de su enorme belleza intrínseca, el análisis complejo es una de las teorías de mayor trascendencia tanto en las matemáticas puras como aplicadas. Por ello, en la formación de matemáticos y de docentes en matemáticas resulta indispensable un curso básico sobre las funciones de variable compleja, conocido de manera simple como *Variable Compleja*. En la Universidad del Tolima desde hace muchos años se ha forjado una tradición de enfocar este curso en la comprensión geométrica del sistema de los números complejos, sin descuidar el desarrollo del cálculo básico con funciones en este contexto. El libro que presentamos recoge nuestra experiencia adquirida al orientar esta asignatura en muchas ocasiones y procura servir de guía para los estudiantes interesados en esta maravillosa rama de la matemática.

El *capítulo 1* es una introducción a los números complejos, con énfasis especial en la geometría de este sistema. El *capítulo 2* es un repaso de las nociones básicas de topología y análisis, especializados al plano complejo, mientras que en el *capítulo 3* presentamos las principales funciones de variable compleja enfatizando, de nuevo, su comportamiento geométrico. Los *capítulos 4 y 5* contienen una introducción básica al cálculo diferencial e integral de funciones de una variable compleja. Cada capítulo está dividido en secciones cortas, correspondientes al tema que se puede estudiar en una clase, y al final del capítulo hay una breve selección de ejercicios.

Salvo la presentación de los temas, que se renueva en cada ocasión

por la interacción activa de estudiantes y docentes, no pretendemos novedad alguna en el material desarrollado en este libro. Nuestro propósito es motivar a todos a acercarse a esta apasionante área y continuar sus lecturas en los excelentes textos de grandes maestros, que indicamos en la bibliografía. Por ello, también aplaudimos la iniciativa del Sello Editorial de la Universidad del Tolima de publicar estos textos con libre acceso.

*Los autores.*  
Ibagué, octubre 2021.



# Capítulo

# 1

## Los números complejos

En este primer capítulo se introduce el sistema de los números complejos en sus distintas perspectivas.

### 1.1. El campo de los números complejos

El sistema numérico complejo se puede introducir como sigue.

**Definición 1.1.1.** *El conjunto de las parejas ordenadas de números reales  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  junto con dos operaciones, la adición dada por*

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d) \quad (1.1)$$

*y la multiplicación dada por*

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (1.2)$$

*lo denotamos  $\mathbb{C}$  y sus integrantes los llamamos números complejos.*

El número complejo  $(a, 0)$  lo escribimos como  $a$ , esto se justifica por la función inyectiva

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ a &\mapsto (a, 0), \end{aligned}$$

que respeta las operaciones de adición y multiplicación, esto es, para cada  $a, b \in \mathbb{R}$  tenemos  $f(a + b) = f(a) + f(b)$  y  $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ , como se verifica de inmediato.

Si hacemos  $i = (0, 1)$ , entonces considerando  $\mathbb{C}$  como espacio vectorial real, resulta

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi.$$

En este punto abandonamos la notación de pares ordenados. Llamamos *parte real* del complejo  $z = a + bi$  al número real  $a$ , y *parte imaginaria* al número real  $b$ , simplificando:

$$\Re z = a \quad \text{e} \quad \Im z = b. \tag{1.3}$$

A partir de (1.1), (1.2) y (1.3) tenemos de forma inmediata que para números complejos cualesquiera  $z, w \in \mathbb{C}$  se cumple la identidad  $\Re(z + w) = \Re z + \Re w$  y también  $\Im(z + w) = \Im z + \Im w$ .

**Proposición 1.1.1.** *Tenemos que  $i^2 = -1$ .*

*Demostración.*  $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1. \quad \square$

Con esta notación, se vuelve natural la multiplicación de números complejos, en efecto:

$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + bd i^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

(en adelante, omitiremos el punto para denotar la multiplicación). Por otro lado, la **proposición 1.1.1** significa que la ecuación  $z^2 + 1 = 0$  tiene solución en los números complejos. En realidad, para cada  $z \in \mathbb{C}$  se tiene  $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$ . Generalizando, si  $z, w \in \mathbb{C}$  entonces  $z^2 + w^2 = (z + wi)(z - wi)$ , esta identidad se puede verificar como ejercicio. Luego para  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  con por lo menos uno de los reales  $a, b$  diferentes de cero tenemos:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2} \right) + i \left( \frac{-b}{a^2 + b^2} \right). \quad (1.4)$$

**Teorema 1.1.1.** *El conjunto de los números complejos constituye un campo.*

*Demostración.* Se deja como ejercicio para el lector. El elemento dado en la **ecuación** (1.4) indica el inverso multiplicativo de un número complejo  $a + bi$  cualquiera diferente de cero.  $\square$

Ahora definimos dos funciones importantes para el estudio de los números complejos.

- **Función valor absoluto.** Dado el número complejo  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , el valor absoluto de  $z$ , también llamado módulo de  $z$ , es

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.5)$$

o, de manera equivalente,  $|z|$  es el valor real no negativo tal que

$$|z|^2 = a^2 + b^2.$$

- **Función conjugado.** Dado el número complejo  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , el conjugado de  $z$  es

$$\bar{z} = a - bi. \quad (1.6)$$

Por ejemplo,  $|i| = 1$  mientras  $\bar{i} = -i$ .

Unas propiedades básicas de estas funciones son dadas por la siguiente proposición.

**Proposición 1.1.2.** *Dados  $z, w \in \mathbb{C}$  tenemos:*

1.  $\Re z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ,
2.  $\Im z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ ,
3.  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ,
4.  $\overline{z\bar{w}} = \bar{z} w$ ,
5.  $\overline{\bar{z}} = z$ .

*Demostración.* Es un ejercicio para el lector, para el cual basta expresar los números complejos en la forma  $z = a + bi$  y  $w = c + di$  y aplicar (1.3), (1.5) y (1.6).  $\square$

Sigue una propiedad fundamental que combina las funciones definidas en (1.5) y (1.6).

**Proposición 1.1.3.** *Dado  $z \in \mathbb{C}$  tenemos:*

$$|z|^2 = z\bar{z}. \quad (1.7)$$

*Demostración.* Si  $z = a + bi$  entonces

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2) + (-ab + ba)i = \\ &= (a^2 + b^2) + 0i = a^2 + b^2 = |z|^2. \end{aligned}$$

$\square$

Las siguientes propiedades se pueden demostrar sin expresar el número complejo en la forma  $a + bi$ .

**Proposición 1.1.4.** *Dados  $z, w \in \mathbb{C}$  tenemos:*

1.  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  (para  $z \neq 0$ ),
2.  $|zw| = |z||w|$ ,
3.  $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$  (para  $w \neq 0$ ),
4.  $|\bar{z}| = |z|$ ,
5.  $|-z| = |z|$ .

*Demostración.* Probamos la igualdad (2). Utilizando la identidad (1.7) tenemos

$$|zw|^2 = zw\overline{z\bar{w}}$$

y por la **proposición 1.1.2** numeral (4), usando las propiedades conmutativa y asociativa, concluimos la demostración. Las otras igualdades quedan como ejercicio.  $\square$

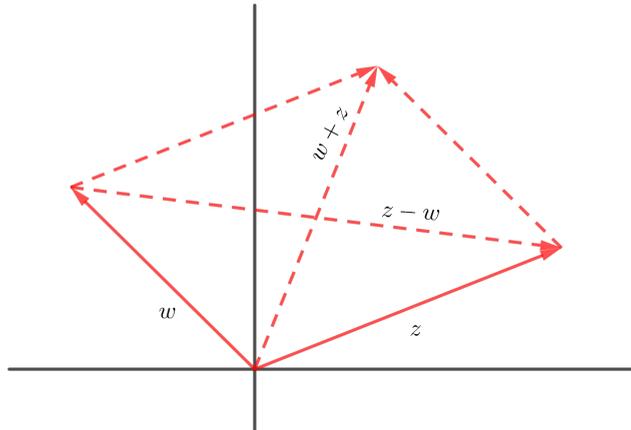
## 1.2. Representación rectangular

Podemos identificar cada  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  con un único punto  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , de manera que sus partes real e imaginaria son también sus coordenadas cartesianas. Ahora, la suma de números complejos es la suma del espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$ , y claramente  $|z - w|$  es la longitud del segmento entre  $z$  y  $w$ . También se tiene la *ley del paralelogramo*: la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales (ver la **Figura 1**).

**Proposición 1.2.1.** *Dados  $z, w \in \mathbb{C}$  tenemos:*

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2). \quad (1.8)$$

**Figura 1:** Representación gráfica de suma y resta de dos números complejos



*Demostración.* En efecto, por (1.7) tenemos:

$$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)},$$

luego, por la **proposición 1.1.2** numeral **(3)** y la propiedad distributiva obtenemos:

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2. \quad (1.9)$$

De la misma manera:

$$|z - w|^2 = |z|^2 - 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2, \quad (1.10)$$

y al sumar (1.9) y (1.10) se obtiene la igualdad (1.8). □ □

Como puede esperarse a partir de la interpretación vectorial, también es válida la desigualdad triangular.

**Proposición 1.2.2.** *Dados  $z, w \in \mathbb{C}$  tenemos:*

$$|z + w| \leq |z| + |w|. \quad (1.11)$$

*Demostración.* En efecto,  $(\Re z)^2 \leq (\Re z)^2 + (\Im z)^2 = |z|^2$  y de aquí  $|\Re z| \leq |z|$ , que es equivalente a:

$$-|z| \leq \Re z \leq |z|. \quad (1.12)$$

Cabe anotar que la parte imaginaria también satisface esta propiedad. Ahora:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2 && \text{por (1.9)} \\ &\leq |z|^2 + 2|z|\bar{w}| + |w|^2 && \text{por (1.12)} \\ &= |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

De aquí llegamos a (1.11). □

Como consecuencia, dados  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  tenemos que:

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|.$$

Para demostrarlo aplicamos la desigualdad triangular a  $|z_1 - z_2| = |(z_1 - z_3) + (z_3 - z_2)|$ . Otra consecuencia inmediata, cuya verificación se deja como ejercicio, es

$$|z - w| \leq |z| + |w|.$$

Para terminar, la siguiente es otra desigualdad muy útil.

**Proposición 1.2.3.** *Dados  $z, w \in \mathbb{C}$  tenemos:*

$$||z| - |w|| \leq |z - w|. \quad (1.13)$$

*Demostración.* Por un lado  $|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|$ , esto es:

$$|z| - |w| \leq |z - w|; \quad (1.14)$$

y, por otra parte,

$$|w| = |(w - z) + z| \leq |w - z| + |z| = |z - w| + |z|$$

de donde  $|w| - |z| \leq |z - w|$ , y factorizando el signo llegamos a

$$|z| - |w| \geq -|z - w|. \quad (1.15)$$

De (1.14) y (1.15) llegamos a

$$-|z - w| \leq |z| - |w| \leq |z - w|,$$

que equivale a la desigualdad (1.13).  $\square$

## 1.3. Representación polar

Podemos representar los números complejos no nulos en coordenadas polares  $(r, \theta)$  donde  $r$  es la distancia al origen y  $\theta$  es el ángulo (en radianes) comprendido entre el eje real positivo y el segmento determinado por el complejo y el origen del plano, como se puede ver en la **Figura 2**.

Dadas las coordenadas polares  $r$  y  $\theta$ , las coordenadas cartesianas se determinan por las igualdades:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\y &= r \operatorname{sen} \theta.\end{aligned}$$

Luego

$$z = x + yi = r \cos \theta + i r \operatorname{sen} \theta = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r \operatorname{cis} \theta,$$

donde se adopta la notación

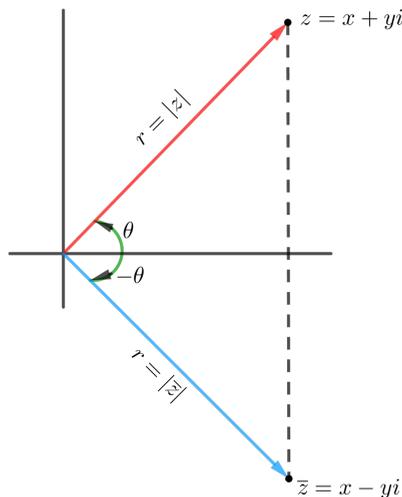
$$\operatorname{cis} \theta = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta,$$

la expresión

$$z = r \operatorname{cis} \theta$$

es llamada la *forma polar* del complejo no nulo  $z$ .

**Figura 2:** Representación polar de un complejo y su conjugado



Dadas las coordenadas cartesianas  $x = \Re z$  e  $y = \Im z$  de un complejo no nulo  $z$ , las coordenadas polares  $r, \theta$  se determinan por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

si  $x \neq 0$ , o

$$r = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2},$$

$$\tan \theta = \frac{\Im z}{\Re z}.$$

Así que  $r = |z|$  es el valor absoluto. Por otra parte, el valor de  $\theta$  se debe escoger según el cuadrante al cual pertenece  $z$ , este número es el ángulo formado por el eje de las  $x$  y el vector formado por el origen del plano y el punto que representa  $z$ . También se denota  $\theta = \arg z$  y se denomina *argumento*. Si bien infinitos valores corresponden al mismo ángulo, el argumento *principal* satisface la condición  $-\pi < \arg z \leq \pi$ .

**Proposición 1.3.1.** *Dados dos complejos no nulos en forma polar  $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$  y  $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$ , su producto es:*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2). \quad (1.16)$$

*De esta manera, en particular,*

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{y} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (1.17)$$

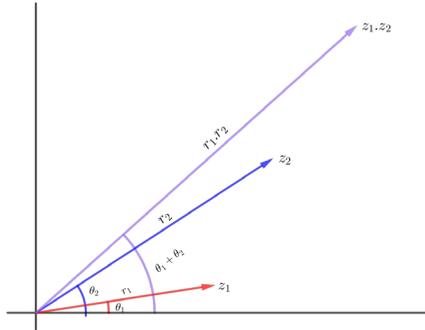
*Demostración.* En efecto,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1 \operatorname{cis} \theta_1)(r_2 \operatorname{cis} \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \operatorname{cis} \theta_1 \operatorname{cis} \theta_2 \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)] \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

En la penúltima línea utilizamos las identidades trigonométricas para la suma de ángulos de las funciones coseno y seno, respectivamente.  $\square$

La **Figura 3** muestra el producto de dos números complejos.

**Figura 3:** Producto de dos números complejos



**Proposición 1.3.2.** *Dados dos complejos no nulos  $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$  y  $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$ , su cociente es:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \operatorname{cis} \theta_1}{r_2 \operatorname{cis} \theta_2} = r_1 r_2^{-1} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2). \quad (1.18)$$

De esta manera, en particular,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{y} \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2. \quad (1.19)$$

*Demostración.* Utilizando el hecho de que la función coseno es una función par y la función seno es una función impar (esto es:  $\cos(-x) = \cos(x)$ ,  $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ ), tenemos:

$$\frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{r_2(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{r_2^2} = r_2^{-1}(\cos(-\theta_2) + i \operatorname{sen}(-\theta_2)).$$

Esto es:

$$\frac{1}{z_2} = r_2^{-1} \operatorname{cis}(-\theta_2) \quad (1.20)$$

Combinando (1.20) con (1.16) se obtiene el resultado.  $\square$

**Proposición 1.3.3.** *Dados los complejos no nulos  $z_i = r_i \operatorname{cis} \theta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tenemos:*

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) \quad (1.21)$$

*Demostración.* Por inducción, a partir de la **proposición 1.3.1**. Los detalles se dejan como ejercicio para el lector.  $\square$

Si todos los números elegidos en la proposición 1.3.3 son iguales, esto es

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$$

con  $z = r \operatorname{cis} \theta$ , entonces obtenemos:

$$z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta. \quad (1.22)$$

La **ecuación** (1.22) se cumple para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , ya que en la **proposición 1.3.2** se demostró que  $z^{-1} = r^{-1} \operatorname{cis}(-\theta)$ , y si  $n < 0$  tenemos  $z^n = (z^{-1})^{-n}$ . Cuando  $|z| = 1$  obtenemos la célebre **fórmula de de Moivre**,

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta. \quad (1.23)$$

Utilizando la **ecuación** (1.22) podemos establecer una fórmula para encontrar raíces arbitrarias de números complejos. Dado un complejo no nulo  $a \in \mathbb{C}$ , buscamos un número complejo  $z$  tal que

$$z^n = a.$$

Utilizando la forma polar, si  $z = |z| \operatorname{cis} \theta$  y  $a = |a| \operatorname{cis} \alpha$ , entonces por la **ecuación**(1.22) es:

y de esta igualdad tenemos:

$$|z| = \sqrt[n]{|a|} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \quad \text{con} \quad 0 \leq k \leq n - 1.$$

Así hemos demostrado el siguiente resultado.

**Proposición 1.3.4.** *Para cualquier entero positivo  $n$ , dado un complejo no nulo  $a = |a| \operatorname{cis} \alpha$  sus raíces  $n$ -ésimas están dadas por la fórmula*

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \operatorname{cis} \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad (1.24)$$

donde  $k$  recorre los  $n$  valores enteros,  $0 \leq k \leq n - 1$ .

**Corolario 1.3.1.** *Las raíces  $n$ -ésimas de la unidad están dadas por:*

$$z_k = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq n - 1. \quad (1.25)$$

*Demostración.* En efecto, para la unidad 1 se tiene  $|1| = 1$  y  $\arg 1 = 0$ , luego en (1.24) queda:

$$z_k = \sqrt[n]{1} \operatorname{cis} \frac{0 + 2k\pi}{n} = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}. \quad \square$$

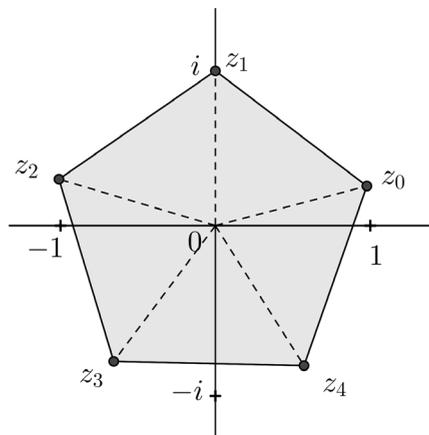
Por ejemplo, las raíces cúbicas de la unidad son:

$$\begin{aligned} z_0 &= \operatorname{cis} \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1 + 0i = 1, \\ z_1 &= \operatorname{cis} \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 &= \operatorname{cis} \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Se observa que, geoméricamente, las raíces cúbicas de la unidad representan los vértices de un triángulo equilátero. En general, las

raíces  $n$ -ésimas de cualquier número complejo no nulo son los vértices de un polígono regular de  $n$  lados. Por ejemplo, las raíces quintas de  $i$  son los vértices de un pentágono regular (ver la **Figura 4**).

**Figura 4:** Pentágono con vértices las raíces quintas de  $i$



## 1.4. Geometría en el plano complejo

Diversas figuras de la geometría plana se pueden expresar con sencillez mediante ecuaciones de variable compleja.

### 1.4.1. La recta

Si  $L$  es una recta en el plano  $\mathbb{C}$ , de la geometría analítica elemental sabemos que  $L$  está completamente determinada por un punto  $a$  en  $L$  y un vector dirección  $b \neq 0$ , de la siguiente manera:

$$L = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + tb, t \in \mathbb{R}\}. \quad (1.26)$$

Despejando en (1.26), tenemos

$$t = \frac{z - a}{b}$$

y como  $t \in \mathbb{R}$ , podemos utilizar esta última igualdad para expresar la recta como:

$$L = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im \frac{z - a}{b} = 0 \right\}. \quad (1.27)$$

Esto se generaliza como sigue.

**Proposición 1.4.1.** *En el plano complejo, toda recta se puede expresar mediante una ecuación de la forma*

$$\Re(\alpha z + \beta) = 0,$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  con  $\alpha \neq 0$ , o bien mediante una ecuación de la forma

$$\Im(\alpha' z + \beta') = 0,$$

donde  $\alpha', \beta' \in \mathbb{C}$  con  $\alpha' \neq 0$ .

*Demostración.* Haciendo  $\alpha = a_1 + ia_2$ ,  $\beta = b_1 + ib_2$ ,  $z = x + iy$  tenemos que  $\alpha z + \beta = (a_1x - a_2y + b_1) + i(a_2x + a_1y + b_2)$ . En consecuencia, la igualdad  $\Re(\alpha z + \beta) = 0$  equivale a  $a_1x - a_2y + b_1 = 0$ , que es la ecuación de una recta porque  $a_1, a_2$  no son ambos cero dado que  $\alpha \neq 0$ . Por otro lado, como  $\Re(iw) = -\Im(w)$ , la segunda ecuación implica  $\Re(i\alpha'z + i\beta') = \Re(i(\alpha'z + \beta')) = -\Im(\alpha'z + \beta') = 0$ , que también corresponde a una recta por la primera parte.  $\square$

El mismo cálculo permite concluir que los siguientes conjuntos son los semiplanos asociados a la recta con ecuación  $\Re(\alpha z + \beta) = 0$ :

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(\alpha z + \beta) > 0\}, \quad K = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(\alpha z + \beta) < 0\}. \quad (1.28)$$

Podemos encontrar otra ecuación compleja de una recta en términos de la función conjugado.

**Proposición 1.4.2.** *En el plano complejo, toda recta se puede expresar mediante una ecuación de la forma*

$$\overline{\alpha z + \beta} = \alpha z + \beta,$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  con  $\alpha \neq 0$ .

*Demostración.* Para cualquier complejo  $w \in \mathbb{C}$  tenemos  $\overline{w} = w$  si y solo si  $w - \overline{w} = 0$ , si y solo si  $2i\Im w = 0$ , si y solo si  $\Im w = 0$ . De esta manera,  $\overline{\alpha z + \beta} = \alpha z + \beta$  si y solo si  $\Im(\alpha z + \beta) = 0$ , lo cual por la **proposición 1.4.1** corresponde a una recta en el plano.  $\square$

Aún hay una tercera ecuación de la recta, en términos del valor absoluto. Interpretando el valor absoluto de la diferencia entre dos complejos como la distancia entre ellos, podemos considerar los puntos equidistantes de dos puntos fijos distintos.

**Proposición 1.4.3.** *Dados dos puntos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  con  $z_1 \neq z_2$ , la recta mediatriz del segmento que los une se puede expresar mediante la ecuación*

$$|z - z_1| = |z - z_2|.$$

*Demostración.* En efecto,  $|z - z_1| = |z - z_2|$  si y solo si  $|z - z_1|^2 = |z - z_2|^2$ , si y solo si  $|z|^2 - 2\Re(z\overline{z_1}) + |z_1|^2 = |z|^2 - 2\Re(z\overline{z_2}) + |z_2|^2$  (véase la **ecuación** (1.10)), si y solo si  $2\Re(z(\overline{z_2} - \overline{z_1})) + |z_1|^2 - |z_2|^2 = 0$ , si y solo si:

$$\Re\left(\left(\overline{z_2 - z_1}\right)z + \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{2}\right) = 0, \quad (1.29)$$

ya que  $\frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{2}$  es un número real. Pero (1.29) es la ecuación de una recta por **proposición 1.4.1**. Si  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  y  $z = x + iy$ , entonces la **ecuación** (1.29) adquiere la forma:

$$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y = \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2},$$

que es una expresión cartesiana conocida para la mediatriz del segmento que une los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . La verificación de los detalles se dejan como ejercicio.  $\square$

Para estos mismos puntos, y utilizando la expresión (1.27) con  $a = z_1$  y  $b = z_2 - z_1$ , la recta que pasa por los puntos  $z_1$  y  $z_2$  y que es perpendicular a la mediatriz encontrada (ver **Figura 5**), tiene ecuación

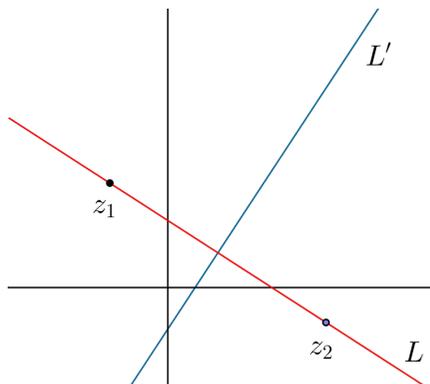
$$\Im(\overline{(z_2 - z_1)}z - \overline{(z_2 - z_1)}z_1) = 0.$$

Comparando con la **ecuación** (1.29), se observa que tienen el mismo coeficiente de  $z$ . Se puede comprobar como ejercicio que las siguientes rectas son perpendiculares:

$$\Re(\alpha z + \beta) = 0 \text{ y } \Im(\alpha z + \gamma) = 0,$$

para todo  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  con  $\alpha \neq 0$ .

**Figura 5:** Mediatriz de la recta determinada por  $z_1$  y  $z_2$



Dados ahora dos puntos  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ , tomando  $a = z_0$  y  $b = z_1 - z_0$ , como al principio de esta sección, el *segmento* con punto inicial  $z_0$  y punto final  $z_1$  es

$$[z_0, z_1] = \{z_0 + t(z_1 - z_0) \mid 0 \leq t \leq 1\} = \{tz_1 + (1 - t)z_0 \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

En general, dados los puntos  $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ , llamamos

$$[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n] = \bigcup_{k=1}^n [z_{k-1}, z_k]$$

una *poligonal* desde  $z_0$  hasta  $z_n$ .

### 1.4.2. La circunferencia

La circunferencia con centro  $z_0 \in \mathbb{C}$  (fijo) y radio  $r > 0$  (real positivo) es el conjunto de todos los complejos  $z$  que distan  $r$  de  $z_0$ , es decir, que satisfacen

$$|z - z_0| = r.$$

En efecto, si  $z_0 = h + ki$  y  $z = x + yi$  entonces  $|z - z_0| = r$  si y solo si  $|z - z_0|^2 = r^2$ , si y solo si  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ , que es la conocida ecuación cartesiana de la circunferencia. Si la diferencia  $z - z_0$  se expresa en forma polar, resulta

$$z - z_0 = |z - z_0| \operatorname{cis} \theta = r \operatorname{cis} \theta,$$

de donde

$$z = z(\theta) = z_0 + r \operatorname{cis} \theta,$$

que es una expresión *paramétrica* de la circunferencia.

Por otro lado, se sigue que el interior de la circunferencia, esto es el *disco abierto* con centro  $z_0$  y radio  $r$ , está dado por

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Existen otras ecuaciones para especificar una circunferencia. Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  con  $\alpha \neq \beta$  y sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  con  $\lambda > 0$  y  $\lambda \neq 1$ . Veamos que la ecuación

$$\left| \frac{z - \alpha}{z - \beta} \right| = \lambda$$

representa un círculo. Este es un célebre teorema de Apolonio, véase la **Figura 6**, según el cual la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos  $P$  para los cuales se cumple la razón  $\frac{AP}{PB} = \lambda$ , siendo  $\lambda$  una constante positiva.

Pero lo podemos ver también en coordenadas cartesianas. En efecto, si  $\alpha = a_1 + ia_2, \beta = b_1 + ib_2, z = x + iy$ , reemplazando en la ecuación dada reescrita de la forma  $|z - \alpha|^2 = \lambda^2 |z - \beta|^2$ , obtenemos:

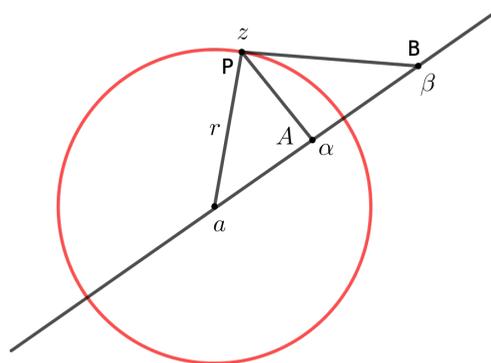
$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = \lambda^2(x - b_1)^2 + \lambda^2(y - b_2)^2.$$

De aquí, por cálculos elementales y completando cuadrados, llegamos a

$$\left( x - \frac{a_1 - \lambda^2 b_1}{1 - \lambda^2} \right)^2 + \left( y - \frac{a_2 - \lambda^2 b_2}{1 - \lambda^2} \right)^2 = k,$$

donde  $k$  es una constante positiva. Esta es la ecuación de una circunferencia.

**Figura 6:** La circunferencia de Apolonio



De nuevo, sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  dos puntos fijos diferentes. La ecuación de la *elipse* con focos  $z_1, z_2$  es

$$|z - z_1| + |z - z_2| = k,$$

siendo  $k$  una constante real positiva.

**Ejemplo 1.4.1.** La igualdad  $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$  representa la *elipse*  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ , como se puede verificar sustituyendo  $z = x + yi$ , y haciendo los cálculos correspondientes.

Por fin, la ecuación de la *hipérbola* con focos  $z_1, z_2$  es

$$|z - z_1| - |z - z_2| = \pm k,$$

siendo  $k$  cualquier constante real no nula (el caso  $k=0$  se reduce a la recta mediatriz).

**Ejemplo 1.4.2.** La igualdad  $|z - 5i| - |z + 5i| = \pm 6$  representa la *hipérbola* con ecuación cartesiana  $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ .

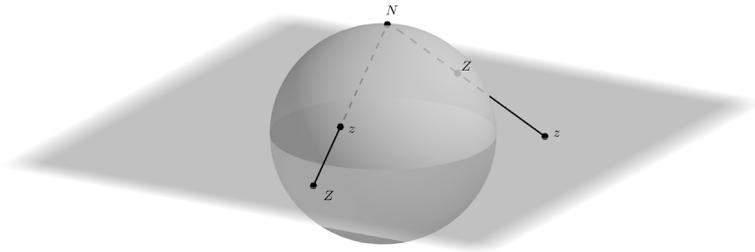
## 1.5. La esfera de Riemann

Con frecuencia aparecen funciones que se convierten en infinitas cuando la variable se aproxima a un punto dado. Para analizar esta situación introducimos el plano extendido el cual es  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . La representación geométrica de  $\mathbb{C}_\infty$  es una esfera unidad en  $\mathbb{R}^3$ , que denotaremos  $\mathcal{S}$ , así que

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Sea  $N = (0, 0, 1)$  el polo norte de  $\mathcal{S}$ , identificamos el plano complejo  $\mathbb{C}$  con  $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  y tenemos que el plano  $\mathbb{C}$  corta a  $\mathcal{S}$  a lo largo del ecuador (ver la **Figura 7**).

**Figura 7:** Representación esférica del plano extendido



Para cada punto  $z \in \mathbb{C}$ , consideremos la recta que va de  $N$  a  $z$  la cual toca a  $\mathcal{S}$  en  $Z \neq N$ . En la **Figura 7** podemos ver que si  $|z| > 1$  entonces  $Z$  está en el hemisferio norte, si  $|z| < 1$  entonces  $Z$  está en el hemisferio sur, y cuando  $|z| = 1$  tenemos que  $Z$  está en el ecuador de la esfera  $\mathcal{S}$  y geoméricamente la posición de  $Z$  coincide con la de  $z \in \mathbb{C}$ . Cuando  $|z| \rightarrow \infty$ , tenemos que  $Z \rightarrow N$ , luego podemos identificar a  $N$  con  $\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ .

### 1.5.1. Relación de coordenadas de $\mathcal{S}$ y $\mathbb{C}$

Sea  $z = x + iy$ , y si  $Z = (x_1, x_2, x_3)$  es el correspondiente punto en  $\mathcal{S}$ , encontremos  $x_1, x_2, x_3$  en términos de  $x, y$ . Si se considera a  $z$  como el punto en  $\mathbb{R}^3$  con coordenadas  $(x, y, 0)$ , de la geometría analítica tenemos que la línea en  $\mathbb{R}^3$  que pasa por  $z$  y  $N$  está dada por

$$\{tN + (1 - t)z \mid t \in \mathbb{R}\},$$

o por

$$\{((1-t)x, (1-t)y, t) \mid t \in \mathbb{R}\}. \quad (1.30)$$

Encontremos el valor de  $t$  cuando la línea (1.30) interseca a  $\mathcal{S}$  en un punto diferente de  $N$ . Para este valor de  $t$  tenemos que  $((1-t)x, (1-t)y, t) \in \mathcal{S}$ , y como  $\mathcal{S}$  es la esfera unidad tenemos que

$$\begin{aligned} (1-t)^2x^2 + (1-t)^2y^2 + t^2 &= 1 \\ (1-t)^2(x^2 + y^2) &= 1 - t^2 \\ (1-t)^2|z|^2 &= (1-t)(1+t) \\ (1-t)|z|^2 &= 1+t \\ |z|^2 - t|z|^2 &= 1+t \\ |z|^2 - 1 &= t(|z|^2 + 1). \end{aligned}$$

Como  $z \neq \infty$  porque  $N \neq Z$ , tenemos

$$t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

y, por lo tanto, reemplazando este valor en (1.30), llegamos a:

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \quad (1.31)$$

Por el **teorema 1.1.2**, esto lo podemos expresar como:

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad (1.32)$$

y si el punto  $Z \neq N$  es dado, podemos encontrar  $x$ ,  $y$  en función

de  $(x_1, x_2, x_3)$  donde  $t = x_3$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-t)x, & \text{entonces } x &= \frac{x_1}{1-t} = \frac{x_1}{1-x_3}, \\ x_2 &= (1-t)y, & \text{entonces } y &= \frac{x_2}{1-t} = \frac{x_2}{1-x_3}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

**Nota 1.5.1.** *La correspondencia entre los puntos de  $\mathcal{S}$  y  $\mathbb{C}_\infty$  es llamada la **proyección estereográfica**.*

**Ejemplo 1.5.1.** *Si tenemos el complejo  $z = 1+i$ , lo podemos expresar en coordenadas de  $\mathcal{S}$ . Veamos:  $|z|^2 + 1 = 3$  y  $|z|^2 - 1 = 1$ , luego por las ecuaciones (1.31) tenemos:*

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{3}.$$

*Podemos decir que es el mismo complejo pero con uniforme diferente para jugar en  $\mathcal{S}$ .*

## 1.5.2. Distancia en el plano extendido

Sean  $z, z' \in \mathbb{C}_\infty$ . La distancia entre  $z$  y  $z'$  es la distancia entre  $Z, Z' \in \mathcal{S}$ , luego si  $Z = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $Z' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  entonces por la fórmula de distancia en el espacio:

$$[d(z, z')]^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2. \tag{1.34}$$

Desarrollando los cuadrados y teniendo en cuenta que  $Z, Z' \in \mathcal{S}$ , esto es, la suma de los cuadrados de sus componentes es 1, llegamos a

$$[d(z, z')]^2 = 2 - 2(x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3). \tag{1.35}$$

Ahora utilizando las ecuaciones (1.32), tenemos:

$$\begin{aligned} x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 &= \\ &= \frac{(z + \bar{z})(z' + \bar{z}') - (z - \bar{z})(z' - \bar{z}') + (|z|^2 - 1)(|z'|^2 - 1)}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Realizando los productos de los paréntesis, cancelando y agrupando términos semejantes llegamos a:

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = \frac{2(z\bar{z}' + \bar{z}z') + |z|^2|z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 + 1}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}.$$

Como  $z\bar{z}' + \bar{z}z' = z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'} = 2\Re(z\bar{z}')$ , tenemos que

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = \frac{4\Re(z\bar{z}') + |z|^2|z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 + 1}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}.$$

Sumando y restando  $|z|^2, |z'|^2$  en el numerador y agrupando términos obtenemos

$$\begin{aligned} x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 &= \\ &= \frac{-2(|z|^2 - 2\Re(z\bar{z}') + |z'|^2) + (|z|^2 + |z'|^2 + |z|^2|z'|^2 + 1)}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)} = \\ &= \frac{-2|z - z'|^2 + (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}, \quad (1.36) \end{aligned}$$

y reemplazando (1.36) en (1.35) tenemos:

$$\begin{aligned} [d(z, z')]^2 &= 2 - 2 \left( \frac{-2|z - z'|^2 + (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)} \right) \\ &= \frac{2(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1) - 2(-2|z - z'|^2 + (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2))}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)} \\ &= \frac{4|z - z'|^2}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}. \end{aligned}$$

De donde, finalmente,

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{[(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.37)$$

Cuando  $Z' = N$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} [d(z, \infty)]^2 &= x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_3 + 1 \\ &= 2 - 2x_3 \\ &= 2 - 2\left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) \\ &= \frac{2(|z|^2 + 1) - 2(|z|^2 - 1)}{|z|^2 + 1} \\ &= \frac{4}{|z|^2 + 1}, \end{aligned}$$

luego

$$d(z, \infty) = \frac{2}{(|z|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.38)$$

**Ejemplo 1.5.2.** Sea  $\Lambda$  un círculo contenido en  $\mathcal{S}$ . Entonces existe un único plano  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  con  $P \cap \mathcal{S} = \Lambda$ . De la geometría analítica tenemos que

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = l\},$$

donde  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  es un vector ortogonal a  $P$  y  $l$  es un número real. Podemos suponer que  $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$ . Utilizando esta información es posible demostrar que si  $\Lambda$  contiene a  $N$ , entonces su proyección estereográfica en  $\mathbb{C}$  es una línea recta, y en otro caso es una circunferencia.

Veamos. Si  $\Lambda$  pasa por  $N = (0, 0, 1)$ , de la ecuación del plano  $0 \cdot \beta_1 + 0 \cdot \beta_2 + 1 \cdot \beta_3 = l$  resulta  $\beta_3 = l$ . Ahora utilizando las ecuaciones

(1.31) tenemos que:

$$\frac{2x\beta_1}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{2y\beta_2}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\beta_3 =,$$

luego:

$$2x\beta_1 + 2y\beta_2 + x^2\beta_3 + y^2\beta_3 - \beta_3 = lx^2 + ly^2 + l$$

Factorizando los términos al cuadrado,

$$2x\beta_1 + 2y\beta_2 + x^2(\beta_3 - l) + y^2(\beta_3 - l) = l + \beta_3, \quad (1.39)$$

pero cuando  $\Lambda$  pasa por  $N$  tenemos que  $\beta_3 = l$ , luego

$$2x\beta_1 + 2y\beta_2 = l + \beta_3$$

Podemos llevar esta ecuación a la de una recta despejando  $y$ :

$$y = ax + b \text{ con } a = \frac{-\beta_1}{\beta_2}, b = \frac{l + \beta_3}{2\beta_2}.$$

Cuando  $\Lambda$  no pasa por  $N$ , tenemos por (1.39):

$$2\frac{\beta_1}{\beta_3 - l}x + 2\frac{\beta_2}{\beta_3 - l}y + x^2 + y^2 = \frac{l + \beta_3}{\beta_3 - l},$$

y formando cuadrados

$$\begin{aligned} \left(x^2 + 2\frac{\beta_1}{\beta_3 - l}x + \frac{\beta_1^2}{(\beta_3 - l)^2}\right) + \left(y^2 + 2\frac{\beta_2}{\beta_3 - l}y + \frac{\beta_2^2}{(\beta_3 - l)^2}\right) &= \\ &= \frac{\beta_1^2}{(\beta_3 - l)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\beta_3 - l)^2} + \frac{l + \beta_3}{\beta_3 - l}, \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{\beta_1}{\beta_3 - l}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta_2}{\beta_3 - l}\right)^2 &= \frac{(\beta_3 + l)(\beta_3 - l) + \beta_1^2 + \beta_2^2}{(\beta_3 - l)^2} \\ &= \beta_3^2 - l^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 \\ &= \frac{1 - l^2}{(\beta_3 - l)^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, llegamos a la ecuación

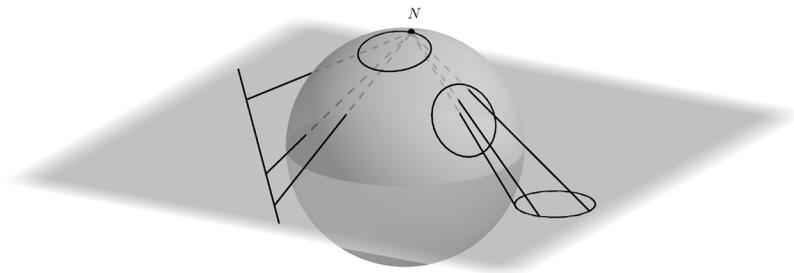
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

donde

$$a = -\frac{\beta_1}{\beta_3 - l}, \quad b = -\frac{\beta_2}{\beta_3 - l}, \quad r = \frac{\sqrt{1 - l^2}}{\beta_3 - l},$$

que es la ecuación de una circunferencia. En la **Figura 8** podemos ver la ilustración de este ejemplo.

**Figura 8:** Proyecciones estereográficas de círculos en el plano extendido



## Ejercicios para el capítulo 1

1.1. Encuentre los siguientes valores:

a)  $(2 + 3i)[3(4 + 3i) - 6(2 - 2i)]$     b)  $(1 + i)^2$     c)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

1.2. Verifique:

$$\left| \frac{(3 - 4i)(2 + i)}{(2 - 4i)(6 + 8i)} \right| = \frac{1}{4}$$

1.3. Si  $z = 3 - 4i$  y  $w = -2 + 3i$ , determine de manera analítica y gráfica:

a)  $2z + 4w$                       b)  $3z - 2\bar{w}$                       c)  $z - \bar{w} - 4$

1.4. Identifique todos los puntos del plano complejo que satisfacen la condición dada. En cada caso, elabore un dibujo.

a)  $\Re((1 - i)z) = 1$     b)  $\Re(z^2) = -1$     c)  $\Im(z^2) < 0$

1.5. Verifique las identidades siguientes:

a)  $\Re(iz) = -\Im z$                       b)  $\Im(iz) = \Re z$

1.6. Exprese los siguientes números complejos en forma polar y elabore un dibujo:

a)  $-7i$                       b)  $\frac{1 - i}{\sqrt{2}}$                       c)  $-2 + i\sqrt{12}$

**1.7.** Expresar los siguientes números complejos en la forma  $x + yi$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\text{a) } (1 + i)^{12} \qquad \text{b) } (-1 + i\sqrt{3})^{20} \qquad \text{c) } \frac{[8 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{8}]^3}{[2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{16}]^{10}}$$

**1.8.** Escriba en forma polar los siguientes números complejos:

$$\text{a) } \frac{(1 - i\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3} - i)^3} \text{ (pase primero a forma polar ambos términos).}$$

$$\text{b) } 1 - \operatorname{sen} \alpha + i \operatorname{cos} \alpha \text{ (donde } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\text{).}$$

**1.9.** Encuentre todos los valores de cada una de las siguientes raíces complejas y elabore un dibujo:

$$\text{a) } \sqrt{18i}$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{27i}$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{2 - 2i\sqrt{3}}$$

$$\text{e) } \sqrt[5]{4 + 4i}$$

**1.10.** Haciendo:

$$w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} = \operatorname{cis} \left( \frac{2\pi}{n} \right),$$

pruebe que las raíces  $n$ -ésimas de la unidad pueden ser expresadas por  $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$ .

**1.11.** Encuentre todas las raíces complejas de las siguientes ecuaciones:

a)  $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$

b)  $(z - 1)^n = (z + 1)^n$

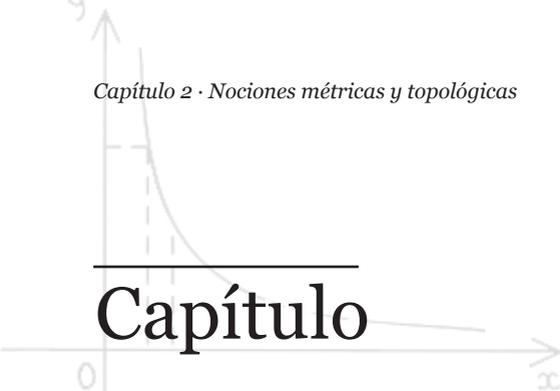
c)  $1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots + (-1)^n z^{2n} = 0$

**1.12.** Encuentre una ecuación compleja para la recta  $y = mx + b$ , donde  $m, b \in \mathbb{R}$  con  $m \neq 0$ .

**1.13.** Encuentre una ecuación de la forma  $|z - z_0| = r$  para la circunferencia de Apolonio

$$\frac{|z - i|}{|z - 4i|} = 2.$$

**1.14.** Encuentre una ecuación compleja para la hipérbola  $9x^2 - 4y^2 = 36$ .



---

# Capítulo

# 2

---

---

## Nociones métricas y topológicas

Los conceptos de análisis y topología que se repasan en este capítulo ya se han estudiado en los cursos correspondientes. Para mayores detalles se pueden consultar los textos [1, 2, 3, 4].

### 2.1. Topología en el plano

#### 2.1.1. Métrica y topología

El valor absoluto de la diferencia entre dos números complejos es, en realidad, una distancia en el sentido técnico.

**Proposición 2.1.1.** *La función*

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : (z, w) \mapsto |z - w|$$

es una métrica en el plano complejo  $\mathbb{C}$  porque para todo  $z, w, u \in \mathbb{C}$ , se satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $|z - w| \geq 0$  y además  $|z - w| = 0$  si y solo si  $z = w$ ,
2.  $|z - w| = |w - z|$ ,
3.  $|z - w| \leq |z - u| + |u - w|$ .

*Demostración.* Se sigue de las propiedades del valor absoluto. □

De esta manera, el plano complejo es un espacio métrico. Como en todas las estructuras tales, se adopta la siguiente notación para los discos abiertos y cerrados con centro  $z_0 \in \mathbb{C}$  y radio real  $\epsilon > 0$ . Son respectivamente

$$B(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}$$

$$\overline{B}(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \epsilon\}$$

La siguiente noción existe en cualquier espacio métrico.

**Definición 2.1.1.** *Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{C}$  del plano complejo es abierto si para cada  $z_0 \in A$  existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $B(z_0, \epsilon) \subseteq A$ .*

**Ejemplo 2.1.1.** *Para dos números reales  $a, b$  con  $a < b$ , la franja vertical*

$$F = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \Re(z) < b\}$$

*es un abierto. Pues dado  $z_0 \in F$ , sea  $\epsilon = \min\{\Re(z_0) - a, b - \Re(z_0)\}$ , entonces  $B(z_0, \epsilon) \subseteq F$ .*

**Proposición 2.1.2.** *La colección de abiertos en el plano es una topología porque satisface las siguientes condiciones:*

1. *El conjunto vacío  $\emptyset$  y el plano  $\mathbb{C}$  son abiertos;*

2. Si  $A, B$  son abiertos entonces su intersección  $A \cap B$  es abierto;
3. Si  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una familia de abiertos entonces su unión  $\bigcup_{i \in I} A_i$  es abierto.

*Demostración.*

1. No existe  $z_0 \in \emptyset$  que incumpla la condición. Por otro lado, para cualquier  $z_0 \in \mathbb{C}$  se tiene  $B(z_0, 1) \subseteq \mathbb{C}$ .

2. Sea  $z_0 \in A \cap B$ . Como  $A$  es abierto, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(z_0, \epsilon) \subseteq A$ ; como  $B$  es abierto, existe  $\delta > 0$  tal que  $B(z_0, \delta) \subseteq B$ . Tomando  $r = \min\{\epsilon, \delta\}$  se tiene  $B(z_0, r) \subseteq A \cap B$ .

3. Dado  $z_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$ , existe  $j \in I$  tal que  $z_0 \in A_j$ . Como  $A_j$  es abierto, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(z_0, \epsilon) \subseteq A_j$  y, dado que  $A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ , también  $B(z_0, \epsilon) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ .  $\square$

## 2.1.2. Conjuntos cerrados

Todas las nociones topológicas usuales se pueden considerar en el plano complejo.

**Definición 2.1.2.** Un conjunto  $C \subseteq \mathbb{C}$  del plano complejo es cerrado si su complemento  $C^c$  es abierto.

**Ejemplo 2.1.2.** Cualquier disco cerrado  $\overline{B}(z_0, \epsilon)$  es un conjunto cerrado. Pues si  $z \notin \overline{B}(z_0, \epsilon)$  entonces  $|z - z_0| > \epsilon$ , de manera que  $\delta = |z - z_0| - \epsilon > 0$  y además  $B(z, \delta) \subseteq (\overline{B}(z_0, \epsilon))^c$ . En efecto, para cada  $w \in B(z, \delta)$  se tiene  $|w - z| < \delta = |z - z_0| - \epsilon$ , luego por la desigualdad triangular  $\epsilon < |z - z_0| - |w - z| \leq |w - z_0|$ .

**Ejemplo 2.1.3.** Cualquier conjunto finito es un conjunto cerrado. En efecto, dado  $F = \{z_1, z_2, \dots, z_k\} \subseteq \mathbb{C}$ , para cada  $z \in F^c$  sea  $\epsilon =$

$\min_{1 \leq i \leq k} |z - z_i|$ . Como  $z \neq z_i$  para cada  $i$  resulta  $\epsilon > 0$ , y además  $B(z, \epsilon) \subseteq F^c$ .

**Proposición 2.1.3.**

1. El conjunto vacío  $\emptyset$  y el plano  $\mathbb{C}$  son cerrados;
2. Si  $C, D$  son cerrados entonces su unión  $C \cup D$  es cerrado;
3. Si  $\{C_i\}_{i \in I}$  es una familia de cerrados entonces su intersección  $\bigcap_{i \in I} C_i$  es cerrado.

Así los conjuntos  $\emptyset$  y  $\mathbb{C}$  son a la vez abiertos y cerrados (de hecho, son los únicos). También existen (muchos) conjuntos que no son abiertos ni cerrados.

**Ejemplo 2.1.4.** El conjunto  $E = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$  no es abierto y no es cerrado. En efecto,  $0 \in E$  y no existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(0, \epsilon) \subseteq E$ . De igual manera, por ejemplo,  $i \in E^c$  y no existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(i, \epsilon) \subseteq E^c$ .

**Definición 2.1.3.** El interior de un conjunto del plano  $S \subseteq \mathbb{C}$  es el mayor abierto contenido en  $S$ , y se denota  $S^{int}$ .

En consecuencia, un conjunto es abierto si y solo si es igual a su interior.

**Proposición 2.1.4.** El interior de un conjunto arbitrario  $S \subseteq \mathbb{C}$  es la unión de todos los abiertos contenidos en  $S$ . Por otro lado, para un punto  $z$  se tiene  $z \in S^{int}$  si y solo si existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(z, \epsilon) \subseteq S$ .

La demostración es la usual en la teoría de espacios métricos.

**Definición 2.1.4.** La adherencia de un conjunto del plano  $S \subseteq \mathbb{C}$  es el menor cerrado que contiene a  $S$ , y se denota  $S^{adh}$ .

Luego, un conjunto es cerrado si y solo si es igual a su adherencia.

**Proposición 2.1.5.** *La adherencia de un conjunto arbitrario  $S \subseteq \mathbb{C}$  es la intersección de todos los cerrados que contienen a  $S$ . Para un punto  $z$  se tiene  $z \in S^{\text{adh}}$  si y solo si para todo  $\epsilon > 0$  se cumple  $S \cap B(z, \epsilon) \neq \emptyset$ .*

**Ejemplo 2.1.5.** *El conjunto  $R = \{p + qi \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$  de todos los complejos con partes real e imaginaria racionales satisface  $R^{\text{int}} = \emptyset$  y  $R^{\text{adh}} = \mathbb{C}$ . En general, los conjuntos  $D$  tales que  $D^{\text{adh}} = \mathbb{C}$  se denominan densos.*

### 2.1.3. Compactos y conexos

**Definición 2.1.5.** *Un conjunto  $K \subseteq \mathbb{C}$  del plano complejo es compacto si para cada familia  $\{A_i\}_{i \in I}$  de abiertos tales que  $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$  existe una subfamilia finita  $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}\}$  tal que  $K \subseteq A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}$ .*

La familia cuya unión contiene el conjunto se llama *cobrimiento abierto* del mismo, y la familia finita es un *subcobrimiento*. En el plano complejo existe otra caracterización de los conjuntos compactos.

**Definición 2.1.6.** *Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{C}$  del plano complejo es acotado si existe algún disco abierto  $B(z_0, \epsilon)$  tal que  $A \subseteq B(z_0, \epsilon)$ .*

De manera alternativa, un conjunto  $A \subseteq \mathbb{C}$  es acotado si y solo si existe algún real  $M > 0$  tal que  $|z| < M$  para cada  $z \in A$ .

**Proposición 2.1.6.** *En el plano complejo  $\mathbb{C}$ , un subconjunto  $K$  es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

**Ejemplo 2.1.6.** *Todo subconjunto finito es compacto (esto sucede en cualquier espacio topológico). Cualquier disco cerrado  $\overline{B}(z_0, \epsilon)$  es compacto en  $\mathbb{C}$ , mientras ningún disco abierto  $B(z_0, \epsilon)$  lo es.*

Por fin, los subconjuntos conexos son los que no se pueden separar mediante abiertos en distintas “piezas”.

**Definición 2.1.7.** *Un conjunto  $D \subseteq \mathbb{C}$  del plano complejo es disconexo si  $D = A \cup B$  donde  $A, B$  son conjuntos disjuntos no vacíos y abiertos en  $D$ , esto es, existen abiertos  $U, V$  del plano complejo tales que  $A = D \cap U$  y  $B = D \cap V$ . Por el contrario, un conjunto  $C \subseteq \mathbb{C}$  del plano complejo es conexo si no es disconexo.*

La siguiente noción se denomina *conexidad por arcos*.

**Proposición 2.1.7.** *En el plano complejo  $\mathbb{C}$ , un subconjunto  $C$  es conexo si y solo si para cada par de puntos de  $C$  existe una curva poligonal contenida completamente en  $C$  que los une.*

**Ejemplo 2.1.7.** *El conjunto  $C = B(0, 1) \cup \overline{B}(3, 1)$  es disconexo.*

**Definición 2.1.8.** *Un conjunto no vacío  $R \subseteq \mathbb{C}$  del plano complejo es una región si es abierto y conexo.*

Un conjunto del plano puede ser conexo y, aún así, tener “huecos”. Esa característica también se puede expresar con precisión.

**Definición 2.1.9.** *Un conjunto  $S \subseteq \mathbb{C}$  del plano complejo es simplemente conexo si es conexo y además toda curva cerrada contenida en  $S$  puede contraerse de manera continua a un punto, sin salir del conjunto  $S$ .*

**Ejemplo 2.1.8.** *Cualquier disco abierto  $B(z_0, \epsilon)$  es una región simplemente conexa. Una corona circular  $\{z \in \mathbb{C} \mid a < |z - z_0| < b\}$ , donde  $a, b$  son reales tales que  $0 < a < b$ , es una región que no es simplemente conexa.*

## 2.2. Sucesiones y series complejas

### 2.2.1. Sucesiones

Una *sucesión compleja* es una función de los números naturales en los complejos:

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} : n \mapsto z(n) = z_n.$$

Una sucesión se denota  $\{z_n\}_n$  o de manera simple  $\{z_n\}$ . Los índices  $n$  se pueden tomar desde 0 o desde 1, según convenga.

Una *subsucesión* de una sucesión compleja  $\{z_n\}$  es una sucesión “contenida” en ella  $\{z_{n_k}\}_k$  con la condición de que si  $j < k$  entonces  $n_j < n_k$ . Esto corresponde a componer la sucesión, en tanto función, con una función estrictamente creciente de números naturales  $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ .

La noción más importante en el estudio de las sucesiones es la de convergencia.

**Definición 2.2.1.** Una sucesión compleja  $\{z_n\}$  converge si existe un número complejo  $z \in \mathbb{C}$  tal que para cualquier  $\epsilon > 0$  (real) existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq N$  se tiene:

$$|z_n - z| < \epsilon.$$

Es decir,  $z_n \in B(z, \epsilon)$  salvo para un número finito de índices. En caso contrario, la sucesión *diverge*.

**Proposición 2.2.1.** En la definición anterior el complejo  $z$ , si existe, es único y se llama el límite de la sucesión. En ese caso se escribe:

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

**Proposición 2.2.2.** Toda sucesión que converge es acotada, esto es, existe  $M > 0$  (real) tal que  $|z_n| < M$  para todo índice  $n$ .

Al revés, como se verá en los ejemplos, no toda sucesión acotada converge.

**Proposición 2.2.3.** *Si la sucesión compleja  $\{z_n\}$  converge a  $z$ , entonces toda subsucesión  $\{z_{n_k}\}_k$  también converge, y su límite es el mismo  $z$ .*

**Proposición 2.2.4** (Linealidad). *Si las sucesiones complejas  $\{z_n\}$ ,  $\{w_n\}$  convergen entonces para cualesquier complejos  $a, b \in \mathbb{C}$  la sucesión  $\{az_n + bw_n\}$  también converge, y además se tiene:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (az_n + bw_n) = a \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + b \lim_{n \rightarrow \infty} w_n.$$

Supóngase ahora que para cada índice  $n$  se tiene  $z_n = x_n + iy_n$  con  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$  reales, esto es,  $x_n = \Re(z_n)$  y  $y_n = \Im(z_n)$ .

**Proposición 2.2.5.** *La sucesión compleja  $\{z_n\}$  converge si y solo si sus partes real  $\{x_n\}$  e imaginaria  $\{y_n\}$  convergen como sucesiones reales, y en ese caso se tiene:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

*Demostración.* En un sentido, esto es consecuencia de las desigualdades:

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |\Re(z_n - z)| \leq |z_n - z|, \\ |y_n - y| &= |\Im(z_n - z)| \leq |z_n - z|. \end{aligned}$$

En el otro sentido, es consecuencia de la linealidad de los límites, expresada en la afirmación anterior.  $\square$

**Proposición 2.2.6.** *Supóngase que la sucesión compleja  $\{z_n\}$  converge a  $z$ .*

1. *La sucesión (real)  $\{|z_n|\}$  converge a  $|z|$ .*
2. *La sucesión (compleja)  $\{\overline{z_n}\}$  converge a  $\overline{z}$ .*

*Demostración.*

1. Porque  $||z_n| - |z|| \leq |z_n - z|$ .

2. Ya que  $|\overline{z_n} - \overline{z}| = |\overline{z_n - z}| = |z_n - z|$ . □

**Ejemplo 2.2.1.** *La sucesión compleja  $\{\frac{1}{n+i}\}$  converge a 0.*

**Ejemplo 2.2.2.** *Para un número complejo fijo  $c \in \mathbb{C}$  se considera la sucesión  $\{c^n\}$ . Si  $|c| < 1$ , la sucesión converge a 0; si  $|c| > 1$ , la sucesión diverge porque no es acotada.*

**Ejemplo 2.2.3.** *Se observa que la sucesión  $\{i^n\} = \{i^0, i^1, i^2, \dots\} = \{1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots\}$  no converge, aunque es acotada. Sí tiene subsucesiones que convergen, por ejemplo  $\{i^{4k}\}$  que es la sucesión constante 1.*

**Ejemplo 2.2.4.** *La sucesión  $\{\frac{i^n}{n}\}$  converge a 0, aunque ningún término de la sucesión es igual a 0.*

**Ejemplo 2.2.5.** *Se considera la sucesión compleja  $\{z_n\}$  definida por:*

$$z_n = \begin{cases} \frac{i^k}{k} & \text{si } n = 2k; \\ 0 & \text{si } n = 2k + 1. \end{cases}$$

*Esto es,  $\{z_n\} = \{0, i, 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{i}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \dots\}$ . Esta sucesión converge a 0 y toma este valor infinitas veces.*

En el plano complejo, diversas nociones topológicas se pueden expresar mediante la convergencia de sucesiones. Por ejemplo, para cualquier conjunto  $A$  de números complejos se tiene que un complejo  $z$  pertenece a su adherencia,  $z \in A^{adh}$ , si y solo si existe una sucesión de elementos de  $A$  que converge a  $z$ . En consecuencia, un subconjunto  $C$  de números complejos es cerrado si y solo si es cerrado para límites en el siguiente sentido: si  $\{z_n\}$  es una sucesión de elementos de  $C$ , esto es  $z_n \in C$  para cada índice  $n$ , y además  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ , entonces  $z \in C$ .

Por otro lado, un subconjunto  $K$  de números complejos es compacto si y solo si toda sucesión de elementos de  $K$  tiene alguna subsucesión convergente.

## 2.2.2. Series

De manera intuitiva, una *serie* es una suma infinita:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \dots$$

Para formalizar esta idea, se definen las *sumas parciales* de una sucesión:

$$\begin{aligned} s_1 &= z_1 \\ s_2 &= z_1 + z_2 \\ s_3 &= z_1 + z_2 + z_3 \\ s_4 &= z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \\ &\vdots \\ s_n &= s_{n-1} + z_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tal sucesión de sumas parciales puede o no converger.

**Definición 2.2.2.** Una serie de números complejos converge si existe el límite de la correspondiente sucesión de sumas parciales, que en ese caso se llama la suma de la serie y se denota:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

En caso contrario, la serie diverge.

**Proposición 2.2.7.** Si la serie compleja  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  converge entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$$

**Proposición 2.2.8** (Linealidad). Si las series  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$  convergen entonces, para complejos  $a, b \in \mathbb{C}$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (az_n + bw_n)$  converge y además se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (az_n + bw_n) = a \sum_{n=0}^{\infty} z_n + b \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

Como antes, sean  $x_n = \Re(z_n)$  y  $y_n = \Im(z_n)$  para cada  $n$ .

**Proposición 2.2.9.** *La serie compleja  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  converge si y solo si sus partes real  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  e imaginaria  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  convergen como series reales, y en ese caso se tiene:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

**Corolario 2.2.1.** *Si la serie compleja  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  converge entonces la serie conjugada  $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_n$  también converge, y además:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_n = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} z_n}.$$

En contraste con las sucesiones, la convergencia de una serie no implica la convergencia de la correspondiente serie de valores absolutos, como se verá en los ejemplos. La implicación recíproca sí es válida, lo cual constituye un primer criterio de convergencia.

**Ejemplo 2.2.6** (Serie geométrica). *Para un número complejo  $c \in \mathbb{C}$  fijo se considera la suma parcial:*

$$c^0 + c^1 + c^2 + c^3 + \cdots + c^n.$$

*Como  $(1 + c + c^2 + c^3 + \cdots + c^n)(1 - c) = 1 - c^{n+1}$ , para  $c \neq 1$  resulta:*

$$c^0 + c^1 + c^2 + c^3 + \cdots + c^n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}. \quad (2.1)$$

*Para  $|c| > 1$ , la sucesión  $\{c^{n+1}\}$  diverge luego la serie también. Cuando  $|c| = 1$  no se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ , luego la serie diverge. Por*

fin, si  $|c| < 1$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^{n+1} = 0$  luego la sucesión (2.1) converge. En conclusión, para cada complejo  $c \in \mathbb{C}$  con  $|c| < 1$  resulta la serie geométrica convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1}{1-c}.$$

En particular, por ejemplo,  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^n = \frac{9+3i}{10}$ .

**Ejemplo 2.2.7.** Se considera  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ . Esta serie converge porque:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} &= \frac{i}{1} - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} - \frac{i}{7} + \dots \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots\right) + i \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) \end{aligned}$$

y estas dos series reales convergen porque son alternantes cuyas sucesiones de valores absolutos son estrictamente decrecientes y convergen a cero. Por otro lado, la serie de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.

### 2.2.3. Algunos criterios de convergencia

Existen algunos métodos que permiten establecer la convergencia de series.

**Proposición 2.2.10** (Convergencia absoluta). *Dada la serie compleja  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ , si la serie real de valores absolutos  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$  converge entonces*

también la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  converge. En este caso, esta serie converge absolutamente.

Como ya se observó, el recíproco no es cierto. Por otro lado, este método se puede generalizar como sigue.

**Proposición 2.2.11** (Criterio de comparación). *Si se tiene  $|z_n| \leq b_n$ , con  $b_n > 0$  para cada índice  $n$ , y además la serie real  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  converge, entonces la serie compleja  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  converge absolutamente.*

**Proposición 2.2.12** (Criterio del cociente). *Supóngase que existe  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$ , en ese caso se trata de un número real no negativo.*

- Si  $l < 1$  entonces la serie compleja  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  converge;
- Si  $l > 1$  entonces la serie compleja  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  diverge.

**Proposición 2.2.13** (Criterio de la raíz). *Supóngase que existe  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ , en ese caso se trata de un número real no negativo.*

- Si  $r < 1$  entonces la serie compleja  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  converge;
- Si  $r > 1$  entonces la serie compleja  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  diverge.

### 2.2.4. Series de potencias

El estudio realizado con la serie geométrica se puede resumir como sigue.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} \frac{1}{1-z} & \text{si } |z| < 1; \\ \text{diverge} & \text{si } |z| \geq 1. \end{cases}$$

En general, para un número complejo fijo  $a \in \mathbb{C}$ , una *serie de potencias* con centro  $a$  es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n,$$

donde  $z \in \mathbb{C}$  se considera variable. En seguida, se plantea el problema de establecer para cuáles valores de  $z$  la serie de potencias converge.

**Proposición 2.2.14.** *Si existe el límite*

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \quad (2.2)$$

entonces la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$  converge absolutamente para todo  $z \in B(a, R)$ , es decir, tal que  $|z - a| < R$ .

**Proposición 2.2.15.** *Si existe el límite*

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (2.3)$$

entonces la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$  converge absolutamente para todo  $z$  tal que  $|z - a| < R$ .

El número real no negativo  $R$  dado por (2.2) y (2.3) es el **radio de convergencia** de la serie de potencias.

**Ejemplo 2.2.8.** En el caso de la serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  se tiene  $a = 0$  y  $a_n = 1$  para cada  $n$ . Es claro que  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ , luego su radio de convergencia es 1.

**Ejemplo 2.2.9.** Para la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$  se tiene  $a = 0$ ,  $a_n = n$ , luego el radio de convergencia es  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$ .

**Ejemplo 2.2.10.** Para la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  es  $a = 0$  y  $a_n = \frac{1}{n!}$ , de donde

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} n + 1 = +\infty,$$

es decir, esta serie converge absolutamente para todo número complejo  $z \in \mathbb{C}$ .

## Ejercicios para el capítulo 2

**2.1.** Dé ejemplos de una familia de abiertos del plano complejo  $\mathbb{C}$  cuya intersección no es abierta, y de una familia de cerrados cuya unión no es cerrada.

**2.2. a)** Muestre que  $(A \cup B)^{adh} = A^{adh} \cup B^{adh}$  para cualesquier subconjuntos  $A, B \subseteq \mathbb{C}$  del plano complejo.

**b)** Dé ejemplos de subconjuntos  $A, B \subseteq \mathbb{C}$  del plano complejo tales que  $(A \cap B)^{adh} \neq A^{adh} \cap B^{adh}$ .

**2.3.** Muestre que si un subconjunto  $A \subseteq \mathbb{C}$  del plano complejo es conexo entonces su adherencia  $A^{adh}$  también es conexa.

**2.4.** Pruebe que un complejo  $z \in \mathbb{C}$  pertenece a la adherencia de un subconjunto  $A \subseteq \mathbb{C}$  si y solo si existe una sucesión de elementos de  $A$  que converge a  $z$ .

**2.5.** Verifique las expresiones siguientes de la serie geométrica.

$$\text{a) } \frac{1}{az + b} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{b^{n+1}} z^n, \text{ para } |z| < \frac{|b|}{|a|}.$$

$$\text{b) } \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}} \right) z^n, \text{ para } |z| < \min\{|a|, |b|\}.$$

$$\text{c) } \frac{1}{b-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(b-a)^{n+1}} (z-a)^n, \text{ para } |z-a| < |b-a|.$$

**2.6.** Encuentre el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n$$

---

# Capítulo

# 3

---

---

## Funciones de variable compleja

A fin de construir un adecuado acervo de ejemplos, en este capítulo se estudian las funciones básicas en los números complejos. Se hace énfasis especial en su comportamiento geométrico, pues deben entenderse como transformaciones del plano.

### 3.1. Funciones elementales

#### 3.1.1. Nociones generales

Una *función de variable compleja* está definida en un subconjunto  $D$  de números complejos y toma valores en los números complejos. De manera simbólica, es una función

$$f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

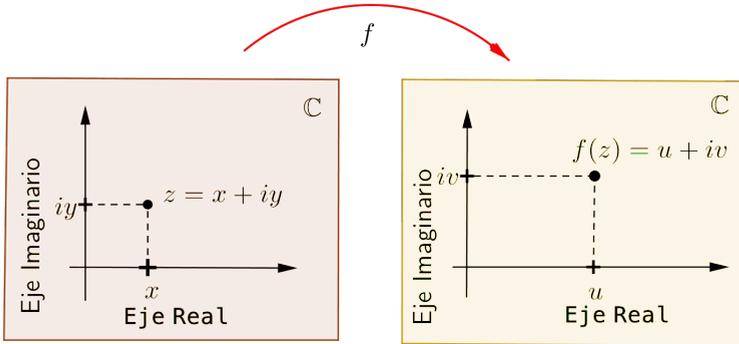
Si la variable es  $z = x + yi$  entonces la parte real e imaginaria de la imagen  $f(z)$ , consideradas como funciones reales de dos variables

reales, se denotan

$$u, v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

de manera que  $f(x + yi) = u(x, y) + i v(x, y)$ , ver **Figura 9**.

**Figura 9:** Representación de una función compleja



Las funciones de variable compleja no se pueden representar de manera gráfica como se hace con las funciones reales, luego su comportamiento geométrico se estudia mediante el efecto de la función sobre ciertos subconjuntos, en especial sobre las rectas horizontales y verticales. En las secciones siguientes se presentan las principales funciones de variable compleja, cuyo conocimiento será útil en el desarrollo del cálculo diferencial e integral complejo.

### 3.1.2. La función lineal

Tomando el nombre del cálculo real, una función compleja lineal tiene la forma  $f(z) = az + b$  donde  $a, b \in \mathbb{C}$  y  $a \neq 0$ . El dominio de esta función es todo el plano complejo. Para su estudio se considerarán varios casos.

- $f(z) = z + b$

Este caso corresponde al valor  $a = 1$ . Si  $b = c + di$  entonces las funciones componentes son  $u = x + c$ ,  $v = y + d$ . La imagen de una recta vertical  $x = p$  es la recta vertical  $u = p + c$ ; la imagen de una recta horizontal  $y = s$  es la recta horizontal  $v = s + d$ . La imagen de cualquier figura es la misma figura, desplazada  $c$  hacia la derecha (si  $c > 0$ ) y  $d$  hacia arriba (si  $d > 0$ ), es decir, se trata de la traslación en el vector  $(c, d) = b$ . Esta función preserva las líneas rectas y los ángulos.

- $f(z) = a_1 z$  con  $a_1 \in \mathbb{R}$  y  $a_1 > 0$

En este caso las funciones componentes son  $u = a_1 x$ ,  $v = a_1 y$ . La imagen de una recta vertical  $x = p$  es la recta vertical  $u = a_1 p$ ; la imagen de una recta horizontal  $y = s$  es la recta horizontal  $v = a_1 s$ . La imagen de un rectángulo, o de cualquier figura, se obtiene multiplicando todas sus coordenadas por el mismo escalar  $a_1$ . El efecto geométrico es una homotecia centrada en el origen. Si  $a_1 > 1$  se trata de una dilatación o ampliación; si  $a_1 = 1$ , resulta la función idéntica; si  $0 < a_1 < 1$  se tiene una contracción o reducción. Esta función también preserva las líneas rectas y los ángulos.

- $f(z) = a_2 z$  con  $|a_2| = 1$

En su forma polar se tiene  $a_2 = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$  para su argumento  $\alpha$ , de manera que las funciones componentes de  $f$  son  $u = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha$ ,  $v = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$ . Estas igualdades se pueden expresar de manera matricial como sigue.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

La matriz de esta transformación lineal es una matriz de rotación, luego esta función corresponde a una rotación alrededor del origen en

un ángulo  $\alpha = \text{Arg}(a_2)$ . Nótese que si  $z = |z|(\cos \theta + i \text{sen } \theta)$  se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} f(z) &= a_2 z = (\cos \alpha + i \text{sen } \alpha) |z| (\cos \theta + i \text{sen } \theta) \\ &= |z| (\cos \theta + i \text{sen } \theta) (\cos \alpha + i \text{sen } \alpha) \\ &= |z| (\cos (\theta + \alpha) + i \text{sen } (\theta + \alpha)) \end{aligned}$$

Así  $f(z)$  tiene el mismo valor absoluto que  $z$  y su argumento aumenta en  $\alpha$ . La imagen por esta función de una línea recta es también una línea recta, rotada un ángulo  $\text{arg}(a_2)$  respecto al origen, así que esta función preserva las líneas rectas y los ángulos.

Combinando los análisis de los casos particulares, la función lineal  $f(z) = az + b$  corresponde de manera simultánea a una homotecia con centro en el origen y factor  $|a|$ , una rotación alrededor del origen de ángulo  $\text{Arg}(a)$  y una traslación en el vector  $b$ . La imagen por esta función de cualquier recta siempre es una recta, y ella preserva los ángulos.

### 3.1.3. La función conjugado

La función compleja *conjugado* está definida como  $f(z) = \bar{z}$ , su dominio es todo el plano complejo y sus funciones componentes son  $u = x$ ,  $v = -y$ . La imagen de una recta vertical  $x = p$  es la misma recta vertical  $u = p$ ; la imagen de una recta horizontal  $y = s$  es la recta horizontal  $v = -s$ . La imagen de cualquier figura es la misma figura reflejada de manera horizontal en el eje real. Esta función preserva todas las rectas y los ángulos.

Combinando esta función con la anterior se obtiene el resultado siguiente.

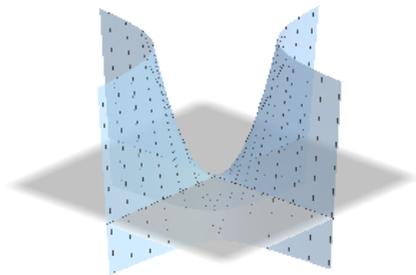
**Proposición 3.1.1.** *Las funciones complejas de la forma  $f(z) = az + b$  y  $g(z) = a\bar{z} + b$ , donde  $a, b \in \mathbb{C}$ , dan cuenta de todos los movimientos de la geometría euclidiana en el plano: reflexiones, traslaciones, rotaciones y homotecias.*

### 3.1.4. La función cuadrática

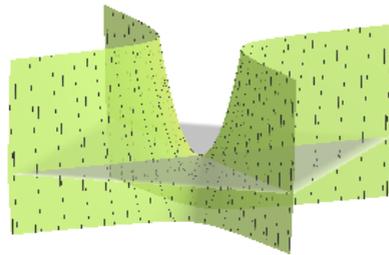
El dominio de la función cuadrática  $f(z) = z^2$  es todo el plano  $\mathbb{C}$ . Las funciones componentes son  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ , ver gráfica en la **Figura 10a** y **Figura 10b**. La imagen de la recta vertical  $x = a \neq 0$  es  $u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2} = \frac{4a^4 - v^2}{4a^2}$ , esta es una parábola con el vértice  $(a^2, 0)$  que se abre en el sentido negativo de  $u$  (“hacia la izquierda”) y corta el eje imaginario en  $v = \pm 2a^2$ . De manera similar, la imagen de la recta horizontal  $y = c \neq 0$  es  $u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2 = \frac{v^2 - 4c^4}{4c^2}$ , una parábola con el vértice  $(-c^2, 0)$  que se abre en el sentido positivo de  $u$  y corta el eje imaginario en  $v = \pm 2c^2$ , ver la **Figura 11a**, y un rectángulo mediante  $f(z) = z^2$  forma una figura en forma de hoja, ver la **Figura 11b**. Se nota que, aunque las rectas son perpendiculares, ambas parábolas tienen como eje, el eje real.

**Figura 10:** Partes imaginaria y real de la función  $f(z) = z^2$ .

(a) Parte imaginaria de  $z^2$ .

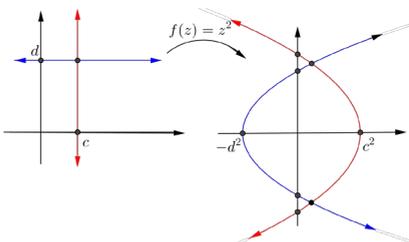


(b) Parte real de  $z^2$ .

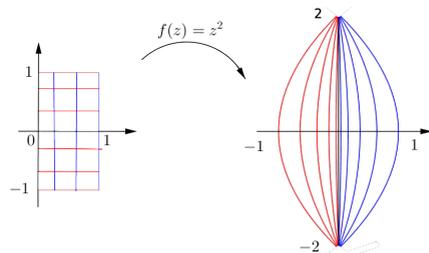


**Figura 11:** Imágenes de rectas y un rectángulo mediante la función  $f(z) = z^2$

(a) Recta horizontal y vertical



(b) Rectángulo  $[0, 1] \times [-1, 1]$



Por otro lado, la imagen de la recta vertical  $x = 0$  es la semirrecta  $v = 0, u \leq 0$ , se nota que ambas semirrectas originales se “doblan” una sobre la otra en una sola semirrecta imagen. La imagen de la recta horizontal  $y = 0$  es la semirrecta  $v = 0, u \geq 0$ ; la imagen de la recta diagonal  $y = x$  es la semirrecta  $u = 0, v \geq 0$ ; la imagen de la recta diagonal  $y = -x$  es la semirrecta  $u = 0, v \leq 0$ ; en general, la imagen de la recta  $y = mx$  con  $m \neq 1$  es la semirrecta  $v = \frac{2m}{1-m^2}u$  donde  $u \geq 0$  cuando  $|m| < 1$  y  $u \leq 0$  cuando  $|m| > 1$ . En coordenadas polares, si  $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  entonces se tiene

$$f(z) = z^2 = |z|^2(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta).$$

Así pues, por la función cuadrática *el valor absoluto se eleva al cuadrado y el argumento se duplica*, es decir, esta función envuelve el plano dos veces sobre sí mismo alrededor del origen. Contrario a la función cuadrática real, la función cuadrática compleja es sobreyectiva: el origen es imagen solo de sí mismo mientras todo punto distinto del origen es imagen de exactamente dos números complejos, a saber, sus dos raíces cuadradas.

De manera similar se puede estudiar el comportamiento geométrico de cualquier función potencia  $f(z) = z^n$ , que envuelve el plano  $n$  veces sobre sí mismo alrededor del origen.

## 3.2. Las transformaciones de Möbius

### 3.2.1. Funciones racionales

Una *función racional* es el cociente de dos polinomios:

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_mz^m}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots + b_nz^n}.$$

Aquí  $q(z) \neq 0$ , es decir, al menos uno de los coeficientes  $b_i$  es diferente de cero. El dominio de esta función  $r(z)$  es todo el plano excepto los finitos puntos  $z_0$  en los cuales  $q(z_0) = 0$ , esto es, las raíces del denominador, que son a lo más  $n$ .

Un caso particular es la función inverso multiplicativo que se estudiará en seguida. Otro caso especial, un poco mas general, es la función racional cuyo numerador y denominador son ambos de grado menor o igual a 1. De manera explícita, se trata de una función  $s$  definida como

$$s(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  son números complejos fijos y  $c, d$  no son a la vez cero. Cuando  $c = 0$  se tiene  $s(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ , y se trata de una función lineal. Cuando  $c \neq 0$ , resulta

$$s(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)}.$$

Así pues, si  $ad - bc = 0$  entonces  $s$  es una función constante (a saber,  $\frac{a}{c}$  cuando  $c \neq 0$  y  $\frac{b}{d}$  en caso contrario). El caso más interesante ocurre cuando  $ad - bc \neq 0$ , que son las llamadas transformaciones de Möbius que se estudiarán luego.

### 3.2.2. La función inverso multiplicativo

La función *inverso multiplicativo* está definida como

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

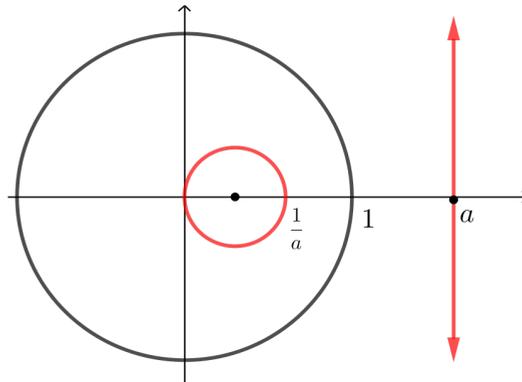
Su dominio es la región  $D = \mathbb{C} - \{0\}$  de todos los complejos no nulos. Las funciones componentes son  $u = \frac{x}{x^2+y^2}$  y  $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$ , ambas tienen como dominio el plano excepto el origen  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Si  $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  entonces

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)) = \frac{1}{|z|}(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta).$$

El efecto geométrico de esta función es una reflexión en la circunferencia unidad  $S^1$  seguida de una reflexión en el eje real.

Se nota que en este caso  $u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$ , de manera que también  $x^2 + y^2 = \frac{1}{u^2 + v^2}$ . Por una parte, esto implica que  $x = u(x^2 + y^2) = \frac{u}{u^2 + v^2}$ ,  $y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$  lo cual muestra, de otra manera, que esta función es igual a su propia inversa. Por otro lado, la imagen de la recta vertical  $x = a \neq 0$  es  $u = \frac{a}{x^2 + y^2} = a(u^2 + v^2)$ , de donde  $u^2 + v^2 = \frac{u}{a}$ , esto es  $(u - \frac{1}{2a})^2 + v^2 = \frac{1}{4a^2}$ , esta es una circunferencia con centro  $(\frac{1}{2a}, 0)$  y radio  $\frac{1}{2a}$ , de manera que pasa por el origen aunque este punto no pertenece al recorrido de la función. En la **Figura 12** se muestran la recta y su imagen en un mismo plano.

**Figura 12:** Imagen de una recta por la función  $f(z) = \frac{1}{z}$



### 3.2.3. Transformaciones de Möbius

**Definición 3.2.1.** Una transformación de Möbius es una función de variable compleja  $S$  definida como:

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  son números complejos fijos tales que  $ad - bc \neq 0$ .

El dominio de esta función es la región  $D = \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$  cuando  $c \neq 0$ , y todo el plano complejo en caso contrario. Como ejemplo, ya se observó que toda función lineal es una transformación de Möbius, cuando  $c = 0$ . La función inverso multiplicativo también es una transformación de Möbius, cuando  $a = d = 0$  y  $b = c \neq 0$ .

**Proposición 3.2.1.** *Toda transformación de Möbius o es una función lineal o es la compuesta de una función lineal, la función inverso multiplicativo y otra función lineal, en ese orden.*

*Demostración.* Si  $c = 0$  se tiene una función lineal. Si  $c \neq 0$  entonces

$$z \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d} \mapsto \left( \frac{bc - ad}{c} \right) \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c} = \frac{az + b}{cz + d},$$

y la transformación de Möbius es la compuesta indicada. □

Así pues, según el análisis geométrico de las funciones lineales y la función inverso multiplicativo, la imagen de una recta o una circunferencia por cualquier transformación de Möbius es una recta o una circunferencia. Por ejemplo, la célebre *transformación de Cayley* es la transformación de Möbius

$$C(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

que tiene como característica peculiar que transforma el semiplano superior  $\Im m(z) > 0$  en  $B(0, 1)$ , el interior del disco unitario  $|z| < 1$  (véase el ejercicio 3.6).

**Proposición 3.2.2.** *Si todos los coeficientes de una transformación de Möbius se multiplican por una constante no nula, la función no cambia.*

*Demostración.* Pues para  $\lambda \neq 0$ ,

$$\frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{\lambda(az + b)}{\lambda(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

□

**Corolario 3.2.1.** *En una transformación de Möbius puede tomarse  $ad - bc = 1$ .*

*Demostración.* Basta multiplicar todos los coeficientes de la transformación dada por

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{ad - bc}}.$$

□

**Proposición 3.2.3.** *Excepto la función idéntica, una transformación de Möbius tiene a lo más dos puntos fijos.*

*Demostración.* La ecuación  $S(z) = z$  equivale a

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Si  $c \neq 0$ , esta es una ecuación cuadrática que, en los complejos, tiene una o dos soluciones; si  $c = 0$  pero  $a \neq d$  entonces es una ecuación lineal con una única solución; por fin, si  $c = 0$  y  $a = d$  entonces la ecuación se reduce a  $-b = 0$ , que no tiene solución si  $b \neq 0$  y que tiene infinitas si  $b = 0$ . En este último caso la transformación de Möbius es  $S(z) = z$ . □

En consecuencia, por ejemplo, la función conjugado no es una transformación de Möbius, porque no es la función idéntica y tiene infinitos puntos fijos, a saber, todos los reales.

**Proposición 3.2.4.**

1. *La compuesta de dos transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius.*
2. *Toda transformación de Möbius es biyectiva, y su función inversa también es una transformación de Möbius.*

*Demostración.*

1. La compuesta de  $S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  y  $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  es

$$ST(z) = \frac{(a\alpha + b\delta)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}.$$

2. La inversa de  $S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  es  $S^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$ . □

**Corolario 3.2.2.** *Las transformaciones de Möbius constituyen un grupo con la composición.*

Se nota que la composición de transformaciones de Möbius corresponde al producto matricial, y que el determinante del producto es el producto de los determinantes. Por otro lado, la función inversa también corresponde a la inversa matricial. Así se observa que el grupo de transformaciones de Möbius es isomorfo al grupo lineal especial  $SL_2(\mathbb{C})$  constituido por todas las matrices complejas  $2 \times 2$  con determinante 1.

### 3.3. La función exponencial

Del cálculo real recordamos las siguientes expresiones en series de potencias para las funciones básicas.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3.1}$$

$$\text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{cos } x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{3.2}$$

Según los resultados de la sección 2.2.4, si la serie (3.1) se considera en los números complejos entonces ella converge absolutamente en todo el plano, lo cual determina una función de variable compleja.

**Definición 3.3.1.** *La función exponencial compleja  $e : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^z$  está dada por la serie de potencias:*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (3.3)$$

Walter Rudin consideró que “esta es la función más importante en matemáticas” (ver [4, p. 1]).

**Proposición 3.3.1.**

1. *La exponencial compleja generaliza la exponencial real: si  $x \in \mathbb{R}$  entonces la exponencial compleja  $e^x$  coincide con la función exponencial real  $e^x$ .*
2.  $e^0 = 1$ .
3.  $e^{z+w} = e^z e^w$ , para todo  $z, w \in \mathbb{C}$ .

*Demostración.* Solo se probará la tercera, que es una consecuencia de las propiedades de las series.

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j w^{n-j} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{z^j w^{n-j}}{j!(n-j)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = e^z e^w \end{aligned}$$

(véase el **teorema 3.50** del libro [3, p. 74]). □

Si  $z = x + iy$  entonces por la proposición se obtiene:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

donde  $e^x$  es la función exponencial real. ¿Qué es ahora  $e^{iy}$  siendo  $y$  un número real? Por definición se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = (iy)^0 + (iy)^1 + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots \\
 &= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \dots \\
 &= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \cos y + i \operatorname{sen} y.
 \end{aligned}$$

Esta notable igualdad, válida para todo  $y \in \mathbb{R}$ , se conoce como *fórmula de Euler*:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \quad (3.4)$$

Ahora la forma polar de un número complejo se puede expresar de manera justificada como  $z = re^{i\theta}$ , siendo  $r = |z|$  y  $\theta = \operatorname{arg}(z)$ . Un caso muy especial se obtiene para  $y = \pi$ , pues entonces  $e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + 0i = -1$ , es decir,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Esta expresión ha sido reconocida como “el teorema más bello” en matemáticas.

Combinando los resultados anteriores se obtiene

$$e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

de manera que las funciones componentes de la exponencial son  $u = e^x \cos y$  y  $v = e^x \operatorname{sen} y$ . Con esta descripción también se pueden demostrar las propiedades enunciadas antes, por ejemplo si  $z = x + iy$ ,

$w = u + iv$  entonces:

$$\begin{aligned}
 e^z e^w &= e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) e^u (\cos v + i \operatorname{sen} v) \\
 &= e^x e^u (\cos y + i \operatorname{sen} y) (\cos v + i \operatorname{sen} v) \\
 &= e^{x+u} (\cos (y+v) + i \operatorname{sen} (y+v)) \\
 &= e^{(x+u)+i(y+v)} \\
 &= e^{(x+iy)+(y+iv)} = e^{z+w}.
 \end{aligned}$$

A partir de estas propiedades, por cualquier camino se pueden demostrar muchas otras.

**Proposición 3.3.2.** *Para todo  $z, w \in \mathbb{C}$ :*

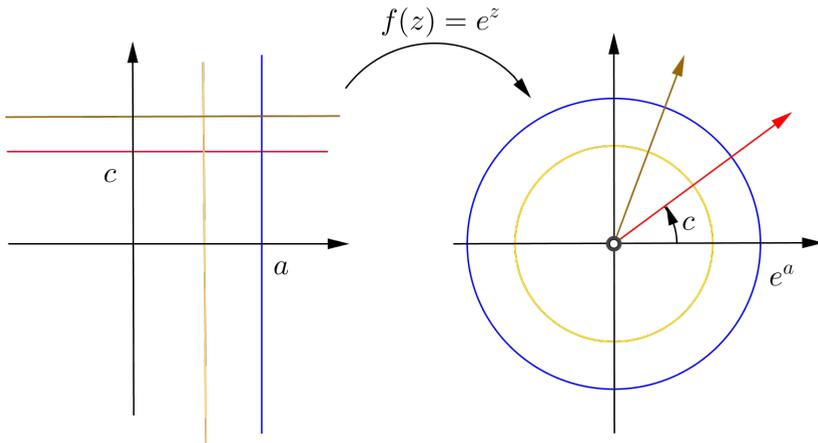
4.  $e^z e^{-z} = 1$ .
5.  $e^z \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .
6.  $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$ .
7.  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ .
8.  $e^z = e^w$  si y solo si  $e^{z-w} = 1$ .
9.  $e^z = 1$  si y solo si  $z = 2k\pi i$  para algún entero  $k \in \mathbb{Z}$ .
10.  $e^z = e^w$  si y solo si  $z = w + 2k\pi i$  para algún entero  $k \in \mathbb{Z}$ .

De esta manera, la función exponencial es *periódica* con periodo  $2\pi i$ , esto es, sus valores se repiten en franjas horizontales del dominio con ancho  $2\pi$ . Esto representa una primera diferencia fundamental con la función exponencial real.

La imagen de la recta vertical  $x = a$  por la función exponencial compleja es  $e^a(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , que es una circunferencia con centro el origen y radio  $e^a$ . Para los distintos valores reales de  $a$  se obtienen todas las circunferencias con centro el origen y radio positivo.

Para una recta vertical fija, la imagen de cualquier segmento de longitud  $2\pi$  recorre la circunferencia una vez, así que la recta completa la describe infinitas veces. Por su parte, la imagen de la recta horizontal  $y = c$  es  $e^x(\cos c + i \operatorname{sen} c)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , que es una semirrecta que parte del origen (sin incluirlo) ver la **Figura 13**. Se nota que cualquier recta  $y = c + 2k\pi$  describe la misma semirrecta. La imagen de una recta diagonal es una espiral logarítmica.

**Figura 13:** Imágenes de rectas por la función  $f(z) = e^z$



A partir de aquí se puede determinar la imagen de diferentes subconjuntos del plano, por ejemplo, la imagen de la región determinada por  $x < 0$ ,  $-\pi < y \leq \pi$  es el disco abierto de radio 1 sin el origen, esto es  $0 < |w| < 1$ . En conclusión, podemos pensar que la función exponencial compleja pliega el plano sobre sí mismo infinitas veces. Esta función no es inyectiva ni sobreyectiva, y toma todos los valores excepto el cero.

### 3.4. Las funciones trigonométricas

A partir de la fórmula de Euler (3.4), obtenemos las siguientes igualdades, válidas para todo  $y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y, \\ e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y. \end{cases}$$

La solución de este sistema es:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \quad (3.5)$$

Estas igualdades se toman como definición de las funciones trigonométricas complejas.

**Definición 3.4.1.** *Para cada número complejo  $z$ , se definen las funciones seno y coseno como:*

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{cos} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

*Las demás funciones trigonométricas se definen de la manera usual.*

A partir de la definición de la función exponencial como serie se obtienen las expresiones:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{cos} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Estas series, que convergen en todo el plano complejo, también se habrían podido tomar como definición de las funciones trigonométricas complejas, generalizando así las series de potencias reales.

Tomando  $z = x + yi$  se tiene:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x), \\ e^{-iz} &= e^{y-ix} = e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x). \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \left( \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + i \cos x \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos x \left( \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + i \operatorname{sen} x \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \sinh y.\end{aligned}$$

Se obtienen así las funciones componentes de las funciones trigonométricas.

Teniendo en cuenta que  $\sinh 0 = 0$  y  $\cosh 0 = 1$ , cuando  $z = x + 0i$  es real, en las funciones componentes se obtiene:

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh 0 + i \cos x \sinh 0 = \operatorname{sen} x,$$

$$\cos z = \cos x \cosh 0 - i \operatorname{sen} x \sinh 0 = \cos x.$$

Esto demuestra el hecho siguiente.

**Proposición 3.4.1.** *Las funciones trigonométricas complejas generalizan las trigonométricas reales.*

En consecuencia se tienen, por ejemplo, los valores siguientes.

$$\begin{array}{cccc}\operatorname{sen} 0 = 0 & \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 & \operatorname{sen} \pi = 0 & \operatorname{sen} 2\pi = 0 \\ \cos 0 = 1 & \cos \frac{\pi}{2} = 0 & \cos \pi = -1 & \cos 2\pi = 1\end{array}$$

A partir de la definición se obtienen de inmediato las siguientes identidades.

**Proposición 3.4.2.** *Para cada número complejo  $z \in \mathbb{C}$  se tiene:*

1.  $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$ ,
2.  $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$  y  $\cos(-z) = \cos z$ .

*Demostración.*

1.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z &= \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 \\ &= -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(-z) &= \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\operatorname{sen} z; \\ \operatorname{cos}(-z) &= \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \operatorname{cos} z. \quad \square\end{aligned}$$

De manera similar, haciendo las cuentas con las definiciones, se obtienen las siguientes identidades que generalizan las usuales.

**Proposición 3.4.3.** *Para cualesquier números complejos  $z, w \in \mathbb{C}$  se tiene:*

1.  $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \operatorname{cos} w + \operatorname{cos} z \operatorname{sen} w;$
2.  $\operatorname{cos}(z + w) = \operatorname{cos} z \operatorname{cos} w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w.$

Reemplazando en los valores indicados en la **proposición 3.4.3** se obtienen otras identidades.

**Corolario 3.4.1.** *Para cada número complejo  $z \in \mathbb{C}$  se tiene:*

1.  $\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z, \operatorname{cos}(z + 2\pi) = \operatorname{cos} z;$
2.  $\operatorname{sen}\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{cos} z, \operatorname{cos}\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} z;$
3.  $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \operatorname{cos} z, \operatorname{cos} 2z = \operatorname{cos}^2 z - \operatorname{sen}^2 z.$

Por fin, se buscan las raíces de las funciones trigonométricas, que resultan ser todas reales.

**Proposición 3.4.4.**

1.  $\operatorname{sen} z = 0$  si y solo si  $z = k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ ;
2.  $\operatorname{cos} z = 0$  si y solo si  $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

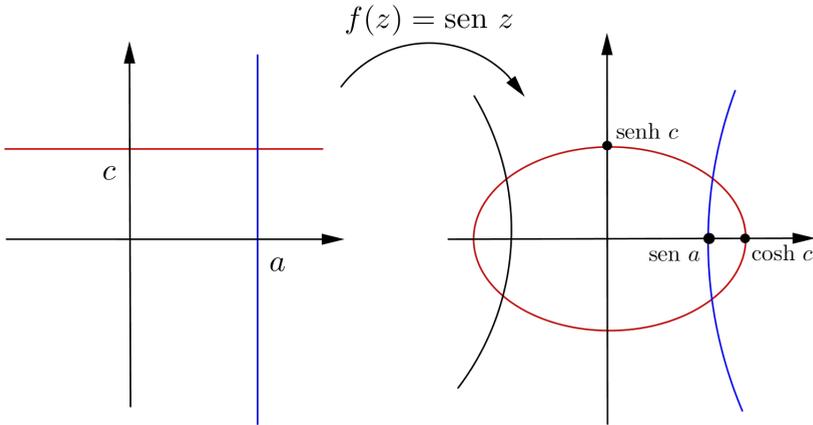
*Demostración.*

1. Por definición,  $\operatorname{sen} z = 0$  si y solo si  $\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = 0$ , si y solo si  $e^{-iz} - e^{iz} = 0$ , si y solo si  $e^{-iz} = e^{iz}$ , si y solo si  $1 = e^{2iz}$ , si y solo si  $2iz = 2k\pi i$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ , si y solo si  $z = k\pi$ .

2. Ahora, por (2) del **corolario 3.4.1**,  $\operatorname{cos} z = 0$  si y solo si  $\operatorname{sen}(z + \frac{\pi}{2}) = 0$ , si y solo si  $z + \frac{\pi}{2} = k'\pi$  para algún  $k' \in \mathbb{Z}$ , si y solo si  $z = \frac{\pi}{2} + (k' - 1)\pi$ , si y solo si  $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

En conclusión, las funciones trigonométricas básicas son periódicas con periodo  $2\pi$ , sus valores se repiten en franjas verticales del dominio con ancho  $2\pi$ .

Por (2) del **corolario 3.4.1**, para analizar la geometría de las funciones trigonométricas basta estudiar una sola función. La imagen de la recta vertical  $x = a$  por la función seno es aquella rama de la hipérbola con centro el origen y focos  $\pm 1$  que corta el eje real en  $\operatorname{sen} a$ ; la imagen de la recta horizontal  $y = c$  por la misma función es una elipse con centro el origen, focos  $\pm 1$ , cortes con el eje horizontal  $\pm \cosh c$  y con el eje vertical  $\pm \operatorname{senh} c$ . ver la **Figura 14**.

**Figura 14:** Imágenes de rectas por la función  $f(z) = \operatorname{sen} z$ 

### 3.5. El logaritmo complejo

Consideremos el problema de encontrar un número complejo  $w \in \mathbb{C}$  tal que:

$$e^w = 1 + i\sqrt{3}.$$

Si  $w = u + vi$ , esto se traduce como:

$$e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right).$$

Esta ecuación se resuelve tomando  $e^u = 2$  (esto es,  $u = \ln 2$ ) y  $v = \frac{\pi}{3}$ , de manera que una solución es  $w = \ln 2 + \frac{\pi i}{3}$ . Pero también se puede tomar cualquier otro argumento que difiera de  $\frac{\pi}{3}$  en un múltiplo entero de  $2\pi$ , de manera que hay infinitas soluciones que se pueden expresar como:

$$w = \ln 2 + i \left( \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Proposición 3.5.1.** Para cualquier número complejo no nulo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , la solución general a la ecuación  $e^w = z$  es:

$$w = \ln |z| + i (\text{Arg}(z) + 2k\pi),$$

donde  $k \in \mathbb{Z}$ .

Escogiendo el valor principal se obtiene una función compleja.

**Definición 3.5.1.** Se define la función logaritmo principal para cada  $z \neq 0$  como:

$$\text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg}(z).$$

Así, por ejemplo,  $\text{Log}(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + \frac{\pi i}{3}$ ,  $\text{Log } i = \frac{\pi i}{2}$  y  $\text{Log}(-1) = \pi i$ .

Esta función es una inversa parcial de la función exponencial.

**Proposición 3.5.2.** Para cada complejo  $z \in \mathbb{C}$  se tiene:

1.  $e^{\text{Log } z} = z$  (si  $z \neq 0$ ),
2.  $\text{Log}(e^z) = z + 2k\pi i$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.*

1. Por la **definición 3.5.1**

$$\begin{aligned} e^{\text{Log } z} &= e^{\ln |z| + i \text{Arg}(z)} = e^{\ln |z|} (\cos \text{Arg}(z) + i \text{sen } \text{Arg}(z)) = \\ &= |z| (\cos \text{Arg}(z) + i \text{sen } \text{Arg}(z)) = z. \end{aligned}$$

2. Si  $z = x + yi$  entonces  $e^z = e^x(\cos y + i \text{sen } y)$  de donde  $|e^z| = e^x$  y  $\text{Arg}(e^z) = y_0$  con  $y_0 = y + 2k\pi$ , aquí  $k \in \mathbb{Z}$  es el único entero tal que  $-\pi < y_0 \leq \pi$ . En consecuencia,  $\text{Log}(e^z) = \ln |e^z| + i \text{Arg}(e^z) = \ln e^x + i y_0 = x + (y + 2k\pi)i = x + yi + 2k\pi i = z + 2k\pi i$ .  $\square$

En el segundo caso no siempre es  $k = 0$ , por ejemplo  $\text{Log} \left( e^{\frac{1}{2} + \frac{3\pi i}{2}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi i}{2}$ . La prueba de las identidades siguientes es similar.

**Proposición 3.5.3.** *Para números complejos no nulos  $z, w \neq 0$  se tiene:*

1.  $\text{Log}(zw) = \text{Log} z + \text{Log} w + 2k\pi i$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}$ ,
2.  $\text{Log} \left( \frac{z}{w} \right) = \text{Log} z - \text{Log} w + 2k\pi i$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}$ ,
3.  $\text{Log}(z^n) = n \text{Log} z + 2k\pi i$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

En el primer caso no se tiene siempre  $k = 0$ . Por ejemplo:

$$\begin{cases} \text{Log} [(-1)i] = \text{Log}(-i) = -\frac{\pi i}{2}, \\ \text{Log}(-1) + \text{Log} i = \pi i + \frac{\pi i}{2} = \frac{3\pi i}{2}, \end{cases}$$

de manera que  $\text{Log} [(-1)i] \neq \text{Log}(-1) + \text{Log} i$ . Por otro lado, respecto al último caso, por ejemplo:

$$\begin{cases} \text{Log}(-1)^2 = \text{Log} 1 = 0, \\ 2 \text{Log}(-1) = 2\pi i, \end{cases}$$

así que  $\text{Log}(-1)^2 \neq 2 \text{Log}(-1)$ .

Con la ayuda del logaritmo, se pueden definir potencias complejas arbitrarias.

**Definición 3.5.2.** *Para cualesquier números complejos  $z, a \in \mathbb{C}$ , con  $z \neq 0$ , se define:*

$$z^a = e^{a \text{Log} z}.$$

Por ejemplo:  $i^i = e^{i \text{Log} i} = e^{i(\frac{\pi i}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^\pi}}$ , se nota que  $i^i \in \mathbb{R}$ . Las propiedades del logaritmo determinan algunas propiedades de las potencias.

**Proposición 3.5.4.** *Para números complejos no nulos  $z, w \neq 0$ , y  $a, b \in \mathbb{C}$  arbitrarios, se tiene:*

1.  $z^{a+b} = z^a z^b$ ,
2.  $(zw)^a = z^a w^a e^{a2k\pi i}$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}$ ,
3.  $\left(\frac{z}{w}\right)^a = \left(\frac{z^a}{w^a}\right) e^{a2k\pi i}$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}$ ,
4.  $(z^a)^b = z^{ab} e^{b2k\pi i}$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

Aunque la continuidad se definirá más adelante de manera formal, se entiende muy bien que en cercanías del eje real negativo el argumento de los números salta de  $-\pi$  a  $\pi$ , lo cual implica que la función logaritmo principal es discontinua en ese eje. Para subsanar este inconveniente se tienen diferentes opciones.

Una posibilidad consiste en escoger otro rango para los valores del argumento. En general, cada porción que se escoja define una rama del logaritmo.

**Definición 3.5.3.** *Una rama del logaritmo complejo es una función continua  $L$  definida en una región (subconjunto abierto y conexo) del plano que no contiene a 0 y tal que  $e^{L(z)} = z$  para cada punto  $z$  de la región.*

Por ejemplo, el logaritmo principal restringido al plano excepto el eje real no positivo es una rama del logaritmo complejo. De nuevo, en ninguna rama se cumplen de manera plena las propiedades esperadas de los logaritmos.

Otra posible solución consiste en sustituir las funciones por *multi-funciones* o funciones multivaluadas, que a cada elemento asignan un conjunto finito o infinito de imágenes y no un sólo elemento.

**Definición 3.5.4.** Se define la multifunción logaritmo para cada  $z \neq 0$  como

$$\log z = \{ \ln |z| + i (\operatorname{Arg} z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

Así, por ejemplo,  $\log(-1) = \{\pi i + 2k\pi i\}$  y  $\log i = \{\frac{\pi i}{2} + 2k\pi i\}$ . En el resultado siguiente, las operaciones a la derecha de cada igualdad se realizan entre conjuntos, como se acostumbra en álgebra.

**Proposición 3.5.5.** Para números complejos no nulos  $z, w \neq 0$  se tiene:

1.  $\log(zw) = \log z + \log w$ ,
2.  $\log\left(\frac{z}{w}\right) = \log z - \log w$ ,
3.  $\log(z^n) = n \log z$ .

La combinación de las ideas anteriores dieron origen a las *superficies de Riemann*. Si se considera la rama  $L_1$  definida con el argumento en  $[0, 2\pi)$ , esta función coincide con el logaritmo principal  $\operatorname{Log}$  en el semiplano superior, pero en el semiplano inferior ellas difieren en  $2\pi i$ . Podría considerarse un pegamiento en el semiplano superior y dos hojas separadas en el inferior. Este proceso se puede repetir indefinidamente, formando una superficie con forma de hélice o espiral infinita de hojas superpuestas. Cada vuelta corresponde a aumentar en  $2\pi$  el argumento.

De manera más técnica, se construye la superficie

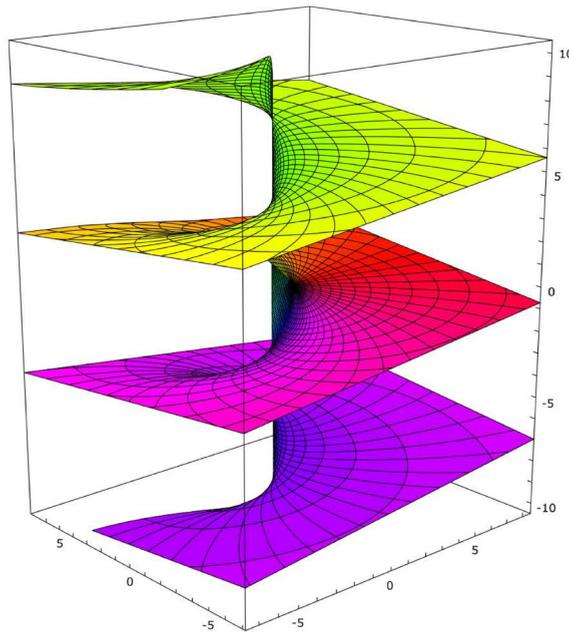
$$R = \left\{ (z, \theta) \mid z \in \mathbb{C} - \{0\}, \theta \in \mathbb{R}, \tan \theta = \frac{\Im(z)}{\Re(z)} \right\}.$$

Aquí  $\theta$  corresponde a un posible argumento de  $z$  y, según el intervalo donde se encuentra, el punto se ubica en la hoja correspondiente de la superficie  $R$ . Como siempre, la excepción  $\Re(z) = 0$  se considera

por aparte. En estas condiciones, la función  $L_R : R \rightarrow \mathbb{C}$  definida como  $L_R(z, \theta) = \ln|z| + i\theta$  es biyectiva, con inversa  $w \mapsto (e^w, \Im(w))$ .

Se nota que, por un lado, se pegan las ramas del logaritmo en una sola función; por otra parte, todos los valores de  $\log z$  pueden imaginarse como una torre de puntos superpuestos en la superficie, uno en cada hoja, (ver la **Figura 15** que fue tomada de [5]).

**Figura 15:** Función  $f(z) = \log z$



## Ejercicios para el capítulo 3

**3.1.** Dado el triángulo con vértices  $3 + 4i$ ,  $-3 + 4i$  y  $-5i$ , encuentre su imagen por cada función y elabore un dibujo.

a)  $f(z) = z - 3 + 5i$

b)  $f(z) = iz$

c)  $f(z) = iz + 2 - i$

d)  $f(z) = i\bar{z} + 2 - i$

e)  $f(z) = \left(\frac{3-4i}{5}\right)z - 5 + 2i$

**3.2.** Encuentre una función lineal  $f(z) = az + b$  con  $a, b \in \mathbb{C}$  tal que la imagen de la circunferencia  $|z + 1| = 2$  es la circunferencia  $|w + i| = 3$ . Elabore un dibujo.

**3.4.** Muestre que la imagen de la recta  $y = x - c$  (con  $c \in \mathbb{R}$  y  $c \neq 0$ ) por la función cuadrática  $f(z) = z^2$  es una parábola que se abre en el sentido positivo del eje  $v$ , esto es, “hacia arriba”.

**3.5.** Muestre que la imagen de la circunferencia con centro el origen y radio  $r > 0$  por la función inverso multiplicativo es la circunferencia con centro el origen y radio  $\frac{1}{r}$ . En particular, la circunferencia unidad es un conjunto invariante bajo esta función.

**3.6.** Expresé la transformación de Cayley,  $C(z) = \frac{z-i}{z+i}$ , como composta de funciones lineales y la función inversa. A partir de ello, justifique que esta función transforma el semiplano superior en el interior del disco unidad.

**3.7.** En cada caso, encuentre todos los valores de  $z$  tales que:

a)  $e^{3z} = 1$ ,      b)  $e^{(z^2)} = 1$ ,      c)  $e^{(e^z)} = 1$ .

**3.8.** Encuentre la imagen de la región  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $y \geq 0$ , por cada

una de las funciones siguientes.

$$\text{a) } f(z) = e^{iz}, \quad \text{b) } f(z) = ie^{iz}.$$

**3.9.** Pruebe que:

$$e^{-|z|} \leq |e^z| \leq e^{|z|}.$$

¿Cuándo se tiene cada igualdad?

**3.10.** Muestre que para  $z = x + yi$  se tiene:

$$\text{a) } |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y = -\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{cosh}^2 y.$$

$$\text{b) } |\operatorname{cos} z|^2 = \operatorname{cos}^2 x + \operatorname{senh}^2 y = -\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cosh}^2 y.$$

c) Concluya que  $|\operatorname{sen} z|^2 + |\operatorname{cos} z|^2 \geq 1$  para cada  $z \in \mathbb{C}$ .  
¿Cuándo se tiene la igualdad?

**3.11.** Demuestre que si  $|z| < 1$  entonces  $|\operatorname{cos} z| < 2$ .

**3.12.** Verifique las igualdades que siguen, para  $y \in \mathbb{R}$ :

$$\text{a) } \operatorname{sen}(iy) = i \operatorname{senh} y, \quad \text{b) } \operatorname{cos}(iy) = \operatorname{cosh} y.$$

**3.13.** En cada caso, encuentre  $\operatorname{Log} z$  y  $\operatorname{log} z$ .

$$\text{a) } z = 1 + i, \quad \text{b) } z = 1 - i, \quad \text{c) } z = \frac{e}{\sqrt{2}} + \frac{e}{\sqrt{2}}i.$$

**3.14.** Encuentre las partes real e imaginaria de los siguientes complejos:

$$\text{a) } x^x \text{ con } x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \quad \text{b) } (iy)^{iy} \text{ con } y \in \mathbb{R}, y \neq 0.$$

**3.15.** Determine el valor principal de cada una de las siguientes expresiones.

**a)**  $3^i$ ,

**b)**  $(\pi i)^e$ ,

**c)**  $(\sqrt{3} + i)^{\frac{i}{2}}$ .

---

# Capítulo

# 4

---

---

## Funciones holomorfas

Aunque las funciones de una variable compleja en realidad tienen dos variables reales, su derivada se puede definir exactamente como en el caso real, porque en los números complejos existe la división. Sin embargo, esto trae consigo consecuencias sorprendentes.

### 4.1. Límites, continuidad y la derivada compleja

Los límites de las funciones de variable compleja se definen como en todos los espacios métricos.

**Definición 4.1.1.** Sea  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función de variable compleja, y sea  $p \in D^{\text{adh}}$  un punto adherente al dominio. Un número complejo  $L$  es el límite de  $f$  cuando  $z$  tiende a  $p$ , si para cada  $\varepsilon > 0$  (real) existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $z \in D$ :

$$\text{si } 0 < |z - p| < \delta \text{ entonces } |f(z) - L| < \varepsilon.$$

En ese caso, se escribe  $L = \lim_{z \rightarrow p} f(z)$ .

Como en todo espacio métrico, en las funciones de variable compleja el límite, cuando existe, es único. Además, de nuevo como en todo espacio métrico, los límites se pueden definir en términos de sucesiones convergentes.

**Proposición 4.1.1.** *Se tiene  $\lim_{z \rightarrow p} f(z) = L$  si y solo si para toda sucesión  $\{z_n\}$  de elementos de  $D$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = p$  se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = L$ .*

El límite de la suma, resta, producto, cociente o compuesta de funciones es la correspondiente operación de los límites.

**Proposición 4.1.2.** *Los límites de las funciones de variable compleja satisfacen las reglas algebraicas usuales.*

Si la función de variable compleja  $f$  tiene componentes  $u$  y  $v$ , esto es  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  con  $u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$ , entonces el límite de  $f$  existe en  $p = r + is$  si y solo si existen los dos límites reales

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (r,s)} u(x, y) \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (r,s)} v(x, y).$$

Estas son funciones reales de dos variables reales, y del cálculo en varias variables se recuerda que para la existencia de estos límites se requiere que existan en todas las direcciones y maneras de acercamiento al punto. De la misma manera, si una función de variable compleja toma valores distintos por diferentes caminos de aproximación a un punto, entonces el límite no existe en ese punto.

**Ejemplo 4.1.1.**

1. No existe  $\lim_{z \rightarrow p} |z|$  (como en las funciones reales).

2. No existe  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$  (en el caso real es la función constante 1).
3. No existe  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Re(z)}{z}$  (como antes, la restricción de esta función a los números reales es la función constante 1).

La noción de límite permite expresar la continuidad de funciones.

**Definición 4.1.2.** Una función de variable compleja  $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  es continua en un punto  $p \in D$  del dominio si

$$\lim_{z \rightarrow p} f(z) = f(p).$$

Es decir, el límite existe y es igual al valor de la función en el punto.

**Proposición 4.1.3.** La función  $f$  es continua en  $p$  si y solo si para toda sucesión  $\{z_n\}$  de elementos de  $D$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = p$  se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(p)$ , es decir, si y solo si

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n).$$

Por las propiedades de los límites se concluye de inmediato que la suma, resta, producto, cociente y compuesta de funciones continuas es continua. En consecuencia, una función de variable compleja es continua si y solo si ambas componentes son continuas.

Una función es continua en todo un conjunto  $P \subseteq D$  si lo es en todos los puntos  $p \in P$ .

**Ejemplo 4.1.2.** Las funciones  $f(z) = |z|$ ,  $f(z) = \bar{z}$ ,  $f(z) = \Re(z)$ , las funciones lineales  $f(z) = az + b$ , la función exponencial  $f(z) = e^z$  y las funciones trigonométricas seno y coseno son todas continuas en cualquier punto del plano complejo. Las funciones racionales y las demás funciones trigonométricas son continuas en todo su dominio.

**Proposición 4.1.4.** *La función  $f$  es continua en el conjunto  $P$  si y solo si para todo abierto  $U \subseteq \mathbb{C}$  la imagen recíproca  $f^{-1}(U)$  es un abierto en  $P$  (esto es, es la intersección de  $P$  con un abierto del plano).*

Según esta última proposición, la continuidad definida corresponde a la noción general de continuidad en topología. Por lo tanto, los resultados conocidos en esa disciplina se conservan, por ejemplo, la imagen continua de un subconjunto compacto es compacta y la imagen continua de un conexo es conexa.

La derivada compleja se define exactamente igual que la de las funciones reales, esto se debe a que los números complejos constituyen un campo conmutativo, luego se pueden dividir los incrementos de las variables.

**Definición 4.1.3.** *Una función de variable compleja  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es derivable en un punto  $z \in D$  del dominio si existe el límite complejo:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

que, en ese caso, se denota  $f'(z)$  y se denomina la derivada de  $f$  en el punto  $z$ .

Se nota que la variable  $h$  es compleja, luego el límite debe existir en cualquier camino de acercamiento a cero. Una manera alternativa, pero equivalente, de definir la derivada en un punto  $z_0 \in D$  es como:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

### Ejemplo 4.1.3.

1. *La función idéntica  $f(z) = z$  es derivable en todo punto, con  $f'(z) = 1$ .*

2. Cualquier función constante  $f(z) = c$  es derivable en todo punto, con  $f'(z) = 0$ .
3. Cualquier función lineal  $f(z) = az + b$  es derivable en todo punto, con  $f'(z) = a$ .
4. La función cuadrática  $f(z) = z^2$  es derivable en todo punto, con  $f'(z) = 2z$ .
5. Cualquier función potencia  $f(z) = z^n$ , donde  $n$  es un entero positivo, es derivable en todo punto, con  $f'(z) = nz^{n-1}$ .

Como en cualquier contexto donde se puede definir esta noción, toda función derivable es continua.

**Proposición 4.1.5.** Si la función de variable compleja  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es derivable en  $z \in D$  entonces es continua en  $z$ .

*Demostración.* Pues para  $h \neq 0$  se tiene

$$f(z + h) = f(z) + h \left[ \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \right].$$

Si la derivada existe, el límite del término derecho, cuando  $h$  tiende a 0, existe y es  $f'(z)$  (pues este valor es constante para  $h$ ).  $\square$

**Ejemplo 4.1.4.** A partir de la definición, y utilizando el ejemplo 4.1.1, se obtienen los hechos siguientes.

1. La función valor absoluto  $f(z) = |z|$  no es derivable en  $z = 0$ , aunque es continua allí.
2. La función conjugado  $f(z) = \bar{z}$  no es derivable en punto alguno del plano, aunque es continua en todos.
3. La función parte real  $f(z) = \Re(z)$  no es derivable en punto alguno del plano, aunque es continua en todos.

4. La función  $f(z) = |z|^2$  es derivable en  $z = 0$  y no es derivable en punto alguno  $z \neq 0$ , si bien es continua en todo el plano complejo.

Por la forma en que se define la derivada, todas las propiedades algebraicas de la misma se conservan intactas en el caso complejo.

**Proposición 4.1.6.** Sean  $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones de variable compleja derivables en un punto  $z \in D$ .

1. Para cada  $a, b \in \mathbb{C}$  la función  $af + bg$  es derivable en  $z$ , y

$$(af + bg)'(z) = af'(z) + bg'(z).$$

2. La función producto  $fg$  es derivable en  $z$ , y

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

3. Si  $g(z) \neq 0$ , la función cociente  $\frac{f}{g}$  es derivable en  $z$ , y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}.$$

La prueba es idéntica a la del cálculo real.

### Ejemplo 4.1.5.

1. La función inverso multiplicativo  $f(z) = \frac{1}{z}$  es derivable en todo punto  $z \neq 0$ , con  $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ .
2. Cualquier función potencia  $f(z) = z^n$ , donde  $n$  es un entero negativo, es derivable en todo punto  $z \neq 0$ , con  $f'(z) = nz^{n-1}$ .

3. La función valor absoluto no es derivable en punto alguno, aunque es continua en todos. Por la definición, se puede verificar que no lo es en  $z = 0$ , véase el **ejemplo 4.1.4**; tampoco es derivable en puntos  $z \neq 0$  porque en ese caso, por la regla del producto, la función  $|z|^2$  sería derivable allí, contradiciendo el **ejemplo 4.1.4**.

Para concluir, se tiene la célebre *regla de la cadena*, que también se demuestra igual que en el cálculo real.

**Proposición 4.1.7.** Sean  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones de variable compleja tales que  $g$  es derivable en  $z \in E$ ,  $g(z) \in D$  y  $f$  es derivable en  $g(z)$ . Entonces la función compuesta  $f \circ g$  es derivable en  $z$ , y

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z).$$

## 4.2. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann

Supóngase que la función de variable compleja  $f$  tiene componentes reales de variables reales  $u, v$ , definidas en un abierto que contiene al punto  $z = x + yi$ .

### • Aproximación por valores reales

Si  $h = t \in \mathbb{R}$ , como número complejo es  $h = (t, 0)$ , luego  $z + h = (x, y) + (t, 0) = (x + t, y)$ , de donde:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+t, y) + i v(x+t, y) - (u(x, y) + i v(x, y))}{t} \\ &= \frac{u(x+t, y) - u(x, y)}{t} + i \frac{v(x+t, y) - v(x, y)}{t}. \end{aligned}$$

Si  $f$  es derivable en  $z$  entonces ambos límites existen cuando  $t$  tiende a cero, y además:

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t, y) - u(x, y)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x+t, y) - v(x, y)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

De manera que  $u, v$  tienen derivadas parciales respecto a  $x$ , y además:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

### • Aproximación por valores imaginarios

Si  $h = ti$  con  $t \in \mathbb{R}$ , como número complejo es  $h = (0, t)$ , luego  $z + h = (x, y + t)$  de donde:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x, y+t) + i v(x, y+t) - (u(x, y) + i v(x, y))}{it} \\ &= \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{t} - i \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{t}. \end{aligned}$$

Si  $f$  es derivable en  $z$  entonces ambos límites existen cuando  $t$  tiende a cero, y además:

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{t} - i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{t} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

De modo que  $u, v$  tienen derivadas parciales respecto a  $y$ , y además:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = -i \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -i \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Así se ha demostrado el siguiente resultado.

**Proposición 4.2.1.** *Si la función de variable compleja  $f = u + iv$  es derivable en  $z = x + iy$ , entonces existen ambas derivadas parciales de cada una de las funciones componentes  $u, v$  en  $(x, y)$  y además se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Estas célebres ecuaciones se pueden resumir como  $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$ , o bien como  $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$ .

### Ejemplo 4.2.1.

1. Si  $f(z) = z^2$ , las componentes  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
2. Si  $f(z) = z^3$ , las componentes  $u = x^3 - 3xy^2$ ,  $v = 3x^2y - y^3$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
3. Si  $f(z) = |z|^2$  entonces  $u = x^2 + y^2$  y  $v = 0$  y las ecuaciones de Cauchy-Riemann solo se satisfacen en  $(0, 0)$ . Es decir, fuera del origen esta función no es derivable.
4. Si  $f(z) = \bar{z}$  entonces  $u = x$ ,  $v = -y$  y no se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en punto alguno, es decir, esta función no es derivable.
5. Si  $f(z) = \Re(z)$  entonces  $u = x$ ,  $v = 0$  y esta función no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann (y, por lo tanto, no es derivable) en punto alguno.
6. Si  $f(z) = \bar{z}^2$  entonces  $u = x^2 - y^2$  y  $v = -2xy$ . Las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen si y solo si  $x = 0$  y  $y = 0$ , es decir, fuera del origen  $z = 0$  esta función no es derivable. Para la derivabilidad en el origen, es necesario retomar la definición.
7. Si  $f(z) = z \Re(z)$  entonces  $u = x^2$  y  $v = xy$ . De nuevo, para  $z \neq 0$  esta función no es derivable, y para  $z = 0$  hay que volver a la definición.

Cuando una función de variable compleja es derivable en un punto, entonces cada una de sus funciones componentes tienen ambas derivadas parciales y estas además satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Surge la duda sobre la validez de la implicación recíproca: si la existencia de las derivadas parciales y el cumplimiento de las ecuaciones garantiza la derivabilidad en un punto.

**Ejemplo 4.2.2.** Se considera la función de variable compleja:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Sus funciones componentes son:

$$u = \frac{x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad y \quad v = \frac{5x^4y - 10x^2y^3 + y^5}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ahora, por ejemplo,

$$\frac{u(0 + s, 0) - u(0, 0)}{s} = \frac{u(s, 0)}{s} = 1$$

luego  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = 1$ . De forma similar  $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 0$  y  $\frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = 1$ . De esta manera, las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  no solo existen en  $z = 0$ , sino que además satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto.

Pero  $f$  no es derivable en  $z = 0$ , ya que

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{h^5}{h|h|^4} = \frac{h^4}{|h|^4},$$

y para  $h = t(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$  con  $t > 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y  $\theta$  fijo se tiene:

$$\frac{h^4}{|h|^4} = \frac{t^4(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^4}{t^4} = \cos 4\theta + i\operatorname{sen} 4\theta,$$

que depende del ángulo  $\theta$ , luego el límite no existe cuando  $h$  tiende a 0.

Ahora se nota que para  $(x, y) \neq (0, 0)$  se tiene, por ejemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4)(x^2 + y^2) - (x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4)4x}{(x^2 + y^2)^3}$$

luego para  $x = 0$ ,  $y \neq 0$  es  $\frac{\partial u}{\partial x} = 5$ , mientras que para todo  $y = 0$  resulta  $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ , el mismo valor que toma en  $(0, 0)$ . De donde la derivada parcial  $\frac{\partial u}{\partial x}$  no es continua en el punto  $(0, 0)$ .

El ejemplo anterior sugiere este resultado.

**Proposición 4.2.2.** *Sea  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función de variable compleja con funciones componentes  $f = u + iv$ . Si las derivadas parciales de  $u, v$  existen todas y son continuas en alguna vecindad de un punto  $(x, y) \in D$ , y además satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto, entonces la función  $f$  es derivable en  $z = x + yi$  y además  $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$ .*

Para la prueba se utiliza el hecho siguiente. En una función real  $f$  de una variable, si es derivable en toda una vecindad de  $x$  entonces, por el teorema del valor medio,

$$\frac{f(x + s) - f(x)}{x + s - x} = f'(x + \lambda s)$$

para algún valor de  $\lambda$ , con  $0 < \lambda < 1$ . De aquí se sigue  $f(x + s) - f(x) = f'(x + \lambda s)s$ . Si, además, la derivada  $f'$  es continua en  $x$ , sea entonces  $E = f'(x + \lambda s) - f'(x)$ , de manera que  $f(x + s) - f(x) = (f'(x) + E)s = f'(x)s + Es$ , con  $\lim_{s \rightarrow 0} E = 0$ .

En el caso de una función real  $F$  de dos variables reales, el resultado análogo es:

$$F(x + s, y + t) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x + \lambda s, y + \mu t)s + \frac{\partial F}{\partial y}(x + \lambda s, y + \mu t)t,$$

para ciertos valores  $\lambda, \mu$  con  $0 < \lambda < 1$ ,  $0 < \mu < 1$ . Si las derivadas

parciales son ambas continuas en  $(x, y)$  entonces:

$$F(x + s, y + t) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)t + Es + Dt,$$

donde

$$\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} E = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} D = 0.$$

*Demostración.* Si  $h = s + it$  entonces:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \\ &= \frac{u(x+s, y+t) - u(s, t)}{h} + i \frac{v(x+s, y+t) - v(s, t)}{h} \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)t}{h} + i \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)t}{h} + \frac{\widehat{E}s + \widehat{D}t}{h} \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)s - \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)t}{h} + i \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)t}{h} + \frac{\widehat{E}s + \widehat{D}t}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \frac{s+it}{h} + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \frac{s+it}{h} + \frac{\widehat{E}s + \widehat{D}t}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + \frac{\widehat{E}s + \widehat{D}t}{h}. \end{aligned}$$

La primera igualdad se tiene por definición; la segunda por el teorema del valor medio y la continuidad de las derivadas parciales, aquí  $\lim_{h \rightarrow 0} \widehat{E} = 0$  y  $\lim_{h \rightarrow 0} \widehat{D} = 0$ , pues  $\widehat{E} = E_u + iE_v$  mientras  $\widehat{D} = D_u + iD_v$ ; la tercera igualdad se tiene por las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto  $(x, y)$ .

Ahora como  $|s| \leq |h|$ , resulta  $\left| \frac{\widehat{E}s}{h} \right| \leq |\widehat{E}|$ , de donde  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widehat{E}s}{h} = 0$ , y de la misma manera  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widehat{D}t}{h} = 0$ .

Así, el límite existe y  $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ . □

**Ejemplo 4.2.3.** Sea  $f(z) = \Re e^2(z) + i \Im e^2(z)$ , esto es  $u = x^2$ ,  $v = y^2$ . Las ecuaciones de Cauchy-Riemann solo se satisfacen en la diagonal  $y = x$ , luego en esos (y solo en esos) puntos la función  $f$  es derivable, con derivada  $f'(z) = 2\Re e(z)$ . Esto también se puede verificar con la definición.

Las componentes de la función exponencial compleja  $f(z) = e^z$  son  $u = e^x \cos y$ ,  $v = e^x \sin y$ . Estas funciones tienen sus dos derivadas parciales continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, luego la función exponencial es derivable con derivada

$$f'(z) = (e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z,$$

como podía esperarse.

**Proposición 4.2.3.** La función exponencial  $e^z$  es derivable con derivada  $e^z$ .

En consecuencia, aplicando el álgebra de las derivadas, se tiene

$$(\operatorname{sen} z)' = \frac{ie^{iz} - (-i)e^{-iz}}{2i} = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z,$$

y de la misma manera  $(\operatorname{cos} z)' = -\operatorname{sen} z$ .

**Proposición 4.2.4.** Las funciones trigonométricas son derivables y  $(\operatorname{sen} z)' = \operatorname{cos} z$ ,  $(\operatorname{cos} z)' = -\operatorname{sen} z$ .

Otra manera de obtener estas derivadas es observar que las componentes de cada función trigonométrica satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y sus derivadas son continuas.

## 4.3. Funciones holomorfas

Ahora se estudian funciones que no solo son derivables en un punto sino en toda una vecindad.

**Definición 4.3.1.** Una función de variable compleja  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa (también llamada analítica) en el punto  $z \in D$  si es derivable en  $z$  y en una vecindad abierta del mismo.

Es decir,  $f$  es holomorfa en  $z$  si existe  $\varepsilon > 0$  (real) tal que  $f$  es derivable en cada punto  $w \in B(z, \varepsilon)$ .

**Ejemplo 4.3.1.** La función inverso multiplicativo  $f(z) = \frac{1}{z}$  es holomorfa en todo punto  $z \neq 0$ . En efecto, tomando  $\varepsilon = |z| > 0$ , la función es derivable en todos los puntos del disco abierto  $B(z, \varepsilon)$ , porque este no contiene el origen.

**Ejemplo 4.3.2.** La función cuadrática  $f(z) = z^2$  es holomorfa en  $z = 0$  porque es derivable en cualquier disco  $B(0, \varepsilon)$ , al ser derivable en cualquier punto del plano. En realidad, esta función es holomorfa en todo punto del plano.

**Definición 4.3.2.** Una función de variable compleja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es entera si es holomorfa en todo el plano.

**Proposición 4.3.1.** Una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es entera si y solo si es derivable en todo punto del plano.

*Demostración.* Si  $f$  es entera, es holomorfa en cualquier punto y, en particular, es derivable allí. En el otro sentido, si  $f$  es derivable en todo punto entonces para cualquier punto  $z$  la función es derivable en todo  $B(z, 1)$ , luego es holomorfa en  $z$ . Siendo este punto arbitrario,  $f$  es entera.  $\square$

**Ejemplo 4.3.3.** Cualquier función polinómica  $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$  con  $a_i \in \mathbb{C}$  es entera. La función exponencial  $e^z$  y las funciones trigonométricas  $\sin z$  y  $\cos z$  son todas enteras.

Ahora se consideran funciones que son derivables pero no holomorfas.

**Ejemplo 4.3.4.** La función  $f(z) = \Re^2(z) + i\Im^2(z)$ , esto es  $u = x^2$ ,  $v = y^2$ , es derivable en  $z = 0$  pero no es holomorfa allí. En efecto,

en cualquier vecindad abierta que contenga a  $B(0, \varepsilon)$  existen puntos en los cuales  $f$  no es derivable, por ejemplo  $z = \frac{\varepsilon}{2}$ . De hecho, esta función es derivable solo en los puntos de la recta  $y = x$  (véase el **ejemplo 4.2.3**), que no contiene ningún abierto, luego no es holomorfa en punto alguno.

**Ejemplo 4.3.5.** La función  $f(z) = |z|^2$  es derivable solo en el origen  $z = 0$ , luego no es holomorfa allí porque cualquier disco abierto  $B(0, \varepsilon)$  contiene puntos diferentes de 0, en los cuales  $f$  no es derivable. En realidad, esta función no es holomorfa en punto alguno.

**Proposición 4.3.2.** Si la función de variable compleja  $f$  es holomorfa en un punto  $z$  entonces lo es en todos los puntos de cierto disco abierto  $B(z, \varepsilon)$ .

*Demostración.* Al ser holomorfa en  $z$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f$  es derivable para cada punto de  $B(z, \varepsilon)$ . Dado  $w \in B(z, \varepsilon)$ , como  $|w - z| < \varepsilon$  se tiene  $\delta = \varepsilon - |w - z| > 0$  y además  $B(w, \delta) \subseteq B(z, \varepsilon)$ . Luego  $f$  es derivable en  $B(w, \delta)$  y holomorfa en  $w$ .  $\square$

En primer lugar, esto implica que el conjunto de puntos en los cuales  $f$  es holomorfa es un conjunto abierto, lo cual no se puede decir del conjunto donde es derivable. Por ejemplo para  $f(z) = \Re^2(z) + i \Im^2(z)$  el conjunto de puntos donde es derivable es la recta  $y = x$ , que no es abierto; para  $f(z) = |z|^2$  el conjunto de puntos donde es derivable es el unitario  $\{0\}$ , que tampoco es abierto.

Para cualquier función de variable compleja  $f$ , sea  $E_f$  el conjunto de puntos en los cuales  $f$  es derivable y  $H_f$  el conjunto de puntos en los cuales es holomorfa.

**Proposición 4.3.3.** Para cualquier función  $f$  se tiene  $H_f = (E_f)^{int}$ , esto es, el conjunto de puntos donde es holomorfa es el interior del conjunto donde es derivable.

*Demostración.* Ya se observó que  $H_f$  es un abierto, y está contenido en  $E_f$ . De esta manera  $H_f \subseteq (E_f)^{int}$ . En el otro sentido, si  $z \in (E_f)^{int}$

entonces  $B(z, \varepsilon) \subseteq E_f$  para algún  $\varepsilon > 0$ , lo cual significa, precisamente, que  $f$  es holomorfa en  $z$ , es decir,  $z \in H_f$ .  $\square$

Por los resultados de la sección anterior, si una función de variable compleja  $f = u + iv$  es tal que sus componentes  $u, v$  tienen derivadas parciales continuas en un disco abierto  $D(z, \varepsilon)$  y que además cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo ese disco, entonces es derivable en el mismo y por lo tanto es holomorfa en  $z$ .

Para el recíproco, se utiliza el resultado siguiente cuya demostración aún no es accesible (véase el **corolario 5.5.2**).

**Nota 4.3.1.** *Una función holomorfa en  $z$  tiene segunda derivada en  $z$ .*

Esto no se cumple en general para funciones derivables, por ejemplo la función  $f(z) = |z|^2$  es derivable solo en  $z = 0$ , luego no tiene sentido considerar la segunda derivada. Tampoco se cumple para funciones de variable real, por ejemplo la función real  $f$  definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ -x^2 & \text{si } -1 < x \leq 0, \end{cases}$$

es derivable en  $x = 0$  y en todo el intervalo  $(-1, 1)$ , pero no tiene segunda derivada en  $x = 0$ .

De esta manera, como la función holomorfa en el punto lo es en toda una vecindad del mismo, en toda esa vecindad tiene sus derivadas parciales continuas porque la función derivada a su vez es derivable, luego es continua. Además se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en toda la vecindad, al ser derivable la función en todos sus puntos. De esta manera se demuestra el resultado siguiente.

**Proposición 4.3.4.** *Una función  $f = u + iv$  es holomorfa en un punto  $z$  si y solo si las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  existen, son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en una vecindad de  $z$ .*

En particular, una función de variable compleja  $f = u + iv$  es entera si y solo si las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  existen, son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo el plano.

## 4.4. Funciones armónicas

Si  $u, v$  son las componentes de una función holomorfa entonces se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Por el hecho mencionado en la sección anterior, estas derivadas parciales a su vez son derivables con continuidad, de manera que se puede intercambiar el orden de derivación. Así, pues:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & \quad \text{es decir,} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, & \quad \text{es decir,} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

De esta manera las componentes  $u, v$  satisfacen ambas, por aparte, la siguiente condición.

**Definición 4.4.1.** Una función real  $F$  de dos variables es armónica si es solución de la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

**Ejemplo 4.4.1.** La función  $F(x, y) = x^2 - y^2$  es armónica; la función  $F(x, y) = x^2 + y^2$  no es armónica; la función  $F(x, y) = e^x \cos y$  sí es armónica.

**Proposición 4.4.1.** Si  $f = u + iv$  es una función de variable compleja holomorfa entonces ambas componentes  $u, v$  son funciones reales armónicas.

**Ejemplo 4.4.2.** Como  $f(z) = z^3$  es holomorfa, sus dos componentes  $u = x^3 - 3xy^2$  y  $v = 3x^2y - y^3$  son ambas funciones armónicas. Lo mismo se tiene para las funciones  $e^x \cos y$ ,  $e^x \sin y$ , componentes de la función holomorfa exponencial. Por otro lado, la función compleja  $\sin z$  es holomorfa, luego sus componentes  $u = \sin x \cosh y$ ,  $v = \cos x \sinh y$  son ambas armónicas.

**Corolario 4.4.1.** Si una función real de dos variables no es armónica, entonces no es la parte real ni imaginaria de función holomorfa alguna.

**Ejemplo 4.4.3.** La función  $u = x^2 + y^2$  no es la parte real ni imaginaria de función holomorfa alguna. Lo mismo se puede decir de  $v = \sin x \cos y$ .

Si  $u$  es una función real armónica, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann es posible encontrar otra función real  $v$  tal que  $f = u + iv$  es holomorfa.

En efecto, a partir de la condición  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$  se obtiene:

$$v = \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + \varphi(x).$$

Derivando respecto a la otra variable, y aplicando la otra condición de Cauchy-Riemann, resulta:

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + \varphi'(x),$$

con lo cual se puede determinar la función  $\varphi$ .

**Ejemplo 4.4.4.** Dada la función armónica  $u = x^2 - y^2$ , es  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$  luego:

$$v = \int 2x dy = 2xy + \varphi(x).$$

Ahora, por un lado:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x),$$

y, por el otro:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y.$$

Igualando resulta  $\varphi'(x) = 0$  de donde  $\varphi(x) = c$  es una constante real. Así  $v = 2xy + c$  y se obtiene la función holomorfa:

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy + c) = z^2 + ci,$$

cuya componente real es la función dada.

En general, se tiene el resultado que sigue.

**Proposición 4.4.2.** *Para toda función real armónica  $u$  existe una función real armónica  $v$ , única salvo una constante real, tal que la función de variable compleja  $f = u + iv$  es holomorfa.*

Cabe anotar que para una función holomorfa  $u + iv$ , excepto en el caso constante, la función  $v + iu$  no es holomorfa. La que sí es holomorfa es  $-v + iu = i(u + iv)$ .

## Ejercicios para el capítulo 4

4.1. Encuentre los límites siguientes, si existen.

$$\text{a) } \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 4}{z - 2i}, \quad \text{b) } \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^3 + 8i}{z^2 + 4}.$$

4.2. Demuestre la proposición 4.1.4: La función  $f$  es continua en el conjunto  $P$  si y solo si para todo abierto  $U$  la imagen recíproca  $f^{-1}(U)$  es la intersección de  $P$  con un abierto del plano.

**4.3.** ¿Dónde es derivable la función  $f(z) = z|z|$ ?

**4.4.** Si  $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$  es una función polinómica de grado  $n$ , pruebe que para  $k = 0, 1, \dots, n$  se tiene

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

**4.5.** De cada una de las funciones siguientes, determine dónde satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y dónde es derivable. Además, en los puntos donde es derivable, encuentre el valor de la derivada utilizando la definición.

**a)**  $f(z) = z \Im(z),$

**b)**  $f(z) = \bar{z} \Re(z),$

**c)**  $f(z) = (z + \Re(z)) \Im(z).$

**4.6.** En cada caso, establezca condiciones suficientes y necesarias sobre las constantes *reales*  $a, b$  y  $c$  para que la función sea derivable en todo el plano

**a)**  $f(z) = x + ay + i(bx + cy),$

**b)**  $f(z) = axy + i(bx^2 + cy^2).$

**4.7.** Repita el ejercicio 4.5 utilizando la afirmación que garantiza la suficiencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

**4.8.** Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, encuentre la función  $f$  más general posible que es derivable en todo  $\mathbb{C}$  y tal que  $\Re(f'(z)) = 0$ .

**4.9. a)** Demuestre que  $(\cos z)' = -\operatorname{sen} z$  utilizando la definición de  $\cos z$  en términos de la función exponencial.

**b)** Pruebe que  $(\operatorname{sen} z)' = \cos z$  encontrando las derivadas parciales de las funciones componentes de  $\operatorname{sen} z$  y verificando que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, además de ser continuas.

**c)** Lo mismo que **(b)** para  $(\cos z)' = -\operatorname{sen} z$ .

**4.10.** Establezca dónde son holomorfas las funciones del ejercicio 4.5.

**4.11.** Demuestre que si  $f$  es una función de variable compleja tal que  $f$  y  $\bar{f}$  son ambas holomorfas en un punto  $z$ , entonces  $f'(z) = 0$ .

**4.12.** Considere la función de variable compleja  $f(z) = x^2 - y^3 + i(x^3 + y^2)$ .

**a)** ¿Dónde sus componentes cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann?

**b)** Establezca dónde es derivable la función  $f$  y encuentre la derivada  $f'(z)$  en esos puntos.

**c)** Establezca dónde es holomorfa la función  $f$ .

**4.13.** En cada uno de los casos siguientes, muestre que la función  $u$  es armónica y encuentre la función más general  $v$  tal que  $f(z) = u + iv$  es holomorfa. Aquí  $a, b, c, d, e$  son constantes *reales* arbitrarias.

**a)**  $u = ax^2 - ay^2 + bx + cy + d,$

**b)**  $u = ax^2 - ay^2 + bxy + cx + dy + e,$

c)  $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4,$

d)  $u = e^{-x}\cos y.$

**4.14.** ¿Existe alguna función holomorfa cuya parte real o imaginaria es igual a  $2xy - y^2$ ?

**4.15.** En cada caso, establezca condiciones suficientes y necesarias sobre la constante real  $a$  para que la función sea armónica. Luego, encuentre la función más general  $v$  tal que  $f = u + iv$  es entera.

a)  $u = ax^2y - y^3 + xy,$       b)  $u = ax^3 + xy^2 + x.$

---

# Capítulo

# 5

---

---

## Integración compleja

Las integrales de funciones de variable compleja se definen como integrales de línea. Una vez más, surge una conexión sorprendente entre la integral y la derivada.

### 5.1. Curvas en el plano complejo

Una *curva compleja* se define como una función  $z : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  que, según el caso, se considera continua o derivable. Sin embargo la palabra “curva”, o su sinónimo “arco”, hace referencia a la imagen, considerada como subconjunto del plano complejo, y la función que la describe es una *parametrización*. De esta manera, una misma curva tiene muchas, incluso infinitas, parametrizaciones.

#### Ejemplo 5.1.1.

1. La función  $z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ , con  $0 \leq t \leq 2\pi$ , describe la circunferencia unidad una vez.

2. La función  $z(t) = e^{-it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , también describe la circunferencia unidad pero en el sentido opuesto o “negativo”.
3. En general,  $z(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , es una parametrización de la circunferencia de radio  $r > 0$  y centro  $z_0 \in \mathbb{C}$ .
4. La función  $z(t) = e^{2\pi it}$  con  $0 \leq t \leq 1$  es una parametrización estándar de la circunferencia unidad, definida en el segmento unidad  $I = [0, 1]$ . Resulta “más rápida” que la anterior.
5. La parametrización  $z(t) = e^{2\pi it^2}$  con  $0 \leq t \leq 1$  describe la circunferencia unidad con “rapidez” creciente.
6. La función  $z(t) = e^{2\pi it}$  con  $0 \leq t \leq 3$  describe la circunferencia unidad tres veces.

Una curva es *cerrada* si coinciden sus puntos inicial y final, esto es si  $z(a) = z(b)$ . Una curva es *simple* si no tiene puntos de intersección salvo, posiblemente, sus extremos:  $z(s) = z(t)$  si y solo si  $s = t$  o  $s, t \in \{a, b\}$ . El célebre *teorema de Jordan* establece que toda curva cerrada simple (llamada *curva de Jordan*) divide el plano en dos regiones. Con precisión, el conjunto complemento  $\mathbb{C} - z[a, b]$  tiene dos componentes conexas, una acotada y la otra no acotada, y todos los puntos de la curva son adherentes a ambas. En estos términos, un conjunto del plano es simplemente conexo si y solo si para cualquier curva de Jordan en él, la componente acotada está contenida totalmente en el conjunto.

Cuando una curva de Jordan es la frontera de cierto conjunto del plano, su orientación se toma *positiva* cuando, al recorrer la curva, la región siempre está a la izquierda de la misma. En particular, la orientación de una curva de Jordan respecto a su componente acotada resulta “en el sentido contrario a las manecillas del reloj”. Por ejemplo,  $z(t) = e^{it}$  tiene orientación positiva respecto al interior de la circunferencia unidad, y  $z(t) = e^{-it}$  negativa.

Igual que en las funciones vectoriales, todo el cálculo con curvas complejas se desarrolla componente a componente. Así, si  $z(t) = x(t) + iy(t)$  con  $x, y$  funciones reales, se tiene lo siguiente.

• Límites

Los límites de las curvas están definidas en tanto son funciones entre espacios métricos.

**Proposición 5.1.1.** *El límite de una curva  $z$  cuando  $t$  tiende a  $t_0 \in [a, b]$  existe si y solo si existen los límites de sus componentes  $x$ ,  $y$  en  $t_0$  y, en ese caso:*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) + i \lim_{t \rightarrow t_0} y(t).$$

También se cumple todo el álgebra de límites.

**Proposición 5.1.2.** *Sean  $z$ ,  $w$  curvas complejas. Si existen  $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t)$  y  $\lim_{t \rightarrow t_0} w(t)$  entonces los siguientes límites existen y su valor es el que se indica:*

1.  $\lim_{t \rightarrow t_0} cz(t) = c \lim_{t \rightarrow t_0} z(t)$ , aquí  $c \in \mathbb{C}$ ,
2.  $\lim_{t \rightarrow t_0} (z(t) + w(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} w(t)$ ,
3.  $\lim_{t \rightarrow t_0} (z(t)w(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) \lim_{t \rightarrow t_0} w(t)$ ,
4.  $\lim_{t \rightarrow t_0} \left( \frac{z(t)}{w(t)} \right) = \frac{\lim_{t \rightarrow t_0} z(t)}{\lim_{t \rightarrow t_0} w(t)}$ , si  $\lim_{t \rightarrow t_0} w(t) \neq 0$ .

Los resultados anteriores tienen una consecuencia inmediata.

**Corolario 5.1.1.** *La curva  $z = x + iy$  es continua en  $t_0$  si y solo si las funciones reales  $x$ ,  $y$  son ambas continuas en  $t_0$ .*

• **Derivadas**

**Definición 5.1.1.** La curva  $z = x + iy$  es derivable en  $t_0$  si las funciones reales  $x$ ,  $y$  lo son ambas en  $t_0$ , y además la derivada en  $t_0$  se define como:

$$z'(t_0) = x'(t_0) + i y'(t_0).$$

En realidad, esto es equivalente a definir:

$$z'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h} \quad (h \in \mathbb{R}),$$

si ese límite existe.

**Ejemplo 5.1.2.** Si  $z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$  entonces:

$$z'(t) = -\sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t) = i e^{it}.$$

Se nota que, en general, si  $z(t) = e^{i\alpha t}$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces  $z'(t) = i\alpha e^{i\alpha t}$ .

El álgebra de derivadas también se cumple en este contexto.

**Proposición 5.1.3.** Si  $z$ ,  $w$  son curvas derivables en  $t$  entonces las siguientes funciones son derivables y sus derivadas son las que se indican:

1.  $(cz(t))' = cz'(t)$ , aquí  $c \in \mathbb{C}$ ,
2.  $(z(t) + w(t))' = z'(t) + w'(t)$ ,
3.  $(z(t)w(t))' = z'(t)w(t) + z(t)w'(t)$ ,
4.  $\left(\frac{z(t)}{w(t)}\right)' = \frac{z'(t)w(t) - z(t)w'(t)}{[w(t)]^2}$ , si  $w(t) \neq 0$ .

La regla de la cadena no tiene sentido entre dos curvas  $z$ ,  $w$  pero sí en el siguiente contexto.

**Proposición 5.1.4.** Si  $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  es una función real derivable en  $s \in (c, d)$  y  $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una curva derivable en  $t = \phi(s)$ , entonces la función compuesta  $\zeta = z \circ \phi$  es derivable en  $s$  y, además:

$$\zeta'(s) = (z \circ \phi)'(s) = z'(\phi(s)) \phi'(s).$$

• Integrales

**Definición 5.1.2.** La curva  $z = x + iy$  es integrable en  $[a, b]$  si las funciones reales  $x, y$  lo son ambas en  $[a, b]$ , y además la integral en ese intervalo se define como:

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt.$$

**Ejemplo 5.1.3.** Si  $z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ , entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} z(t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + i \sin t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\ &= \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + i (-\cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + i. \end{aligned}$$

Se observa que este ejemplo también se había podido resolver utilizando la igualdad siguiente, válida para  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ :

$$\int_a^b e^{i\alpha t} dt = \frac{e^{i\alpha t}}{i\alpha} \Big|_a^b = -i \frac{e^{i\alpha t}}{\alpha} \Big|_a^b.$$

Para estas funciones se cumple el álgebra de integrales.

**Proposición 5.1.5.** Si  $z, w$  son curvas integrables en  $[a, b]$  entonces las siguientes funciones son integrables y sus integrales son las que se indican:

1.  $\int_a^b (cz(t)) dt = c \int_a^b z(t) dt \quad (c \in \mathbb{C});$
2.  $\int_a^b (z(t) + w(t)) dt = \int_a^b z(t) dt + \int_a^b w(t) dt;$
3.  $\int_a^b z(t)w'(t) dt = z(t)w(t) \Big|_a^b - \int_a^b z'(t)w(t) dt.$

La tercera identidad corresponde al método de integración por partes. Por otro lado, el teorema fundamental del cálculo se cumple componente a componente.

**Proposición 5.1.6.** Si  $z$  es una curva continua en  $[a, b]$  y la curva  $Z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  satisface  $Z'(t) = z(t)$  para cada  $t \in (a, b)$  (antiderivada), entonces:

$$\int_a^b z(t) dt = Z(t) \Big|_a^b = Z(b) - Z(a).$$

También hay una acotación para el valor de la integral.

**Proposición 5.1.7.** Si  $z : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  es integrable en  $[a, b]$ , entonces:

$$\left| \int_a^b z(t) dt \right| \leq \int_a^b |z(t)| dt.$$

*Demostración.* Si la integral de  $z$  es cero, la desigualdad es inmediata porque su valor absoluto también es cero. En caso contrario, este número complejo se puede expresar en forma polar como  $\int_a^b z(t) dt = re^{i\theta}$  ( $r, \theta$  constantes), de donde:

$$\begin{aligned} r &= e^{-i\theta} \int_a^b z(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta} z(t) dt = \\ &= \Re \left( \int_a^b e^{-i\theta} z(t) dt \right) = \int_a^b \Re (e^{-i\theta} z(t)) dt \leq \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta} z(t)| dt = \int_a^b |e^{-i\theta}| |z(t)| dt = \int_a^b |z(t)| dt. \end{aligned}$$

La tercera igualdad se tiene porque  $r$  es un número real; la cuarta, por la definición de la integral; la desigualdad, porque siempre  $\Re(w) \leq |w|$  y esta desigualdad entre números reales se mantiene bajo la integral real; la última igualdad se debe a que  $|e^{-i\theta}| = 1$ .  $\square$

## 5.2. Integral de una función de variable compleja

La integral de línea que define la integral de una función de variable compleja debe ponderarse para que el valor no dependa de la parametrización escogida.

**Definición 5.2.1.** Sea  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función de variable compleja y  $C$  una curva derivable contenida en  $D$ , descrita una vez por  $z : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow D$ . La integral de  $f$  a lo largo de la curva  $C$  se define como:

$$\int_C f dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt,$$

si esta última integral existe.

La función compuesta  $f \circ z$  y la derivada  $z'$  son funciones de  $[a, b]$  en  $\mathbb{C}$ , luego su producto también lo es. De esta manera, el integrando de la derecha es una curva y su integral es una de las que se estudiaron en el apartado anterior.

**Ejemplo 5.2.1.** Si  $C$  es el segmento de recta de  $0$  a  $1 + i$ , la integral

$$\int_C 3z^2 dz$$

se puede calcular como sigue. Primero se debe escoger una parametrización de  $C$ , sin duda la más sencilla es  $z(t) = 0 + t((1 + i) - 0) =$

$(1+i)t$  con  $0 \leq t \leq 1$ . En estas condiciones  $z'(t) = 1+i$ , luego:

$$\begin{aligned} \int_C 3z^2 dz &= \int_0^1 3[(1+i)t]^2(1+i) dt = \int_0^1 3(2i)t^2(1+i) dt \\ &= (-6+6i) \int_0^1 t^2 dt = (-6+6i) \left(\frac{1}{3}\right) = -2+2i. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.2.2.** Si de nuevo  $C$  es el segmento de recta de  $0$  a  $1+i$ , entonces

$$\int_C 3|z|^2 dz = 2+2i.$$

Nótese que la integral de una función compleja cuyos valores son todos reales no necesariamente es real.

En efecto, tomando  $z(t) = (1+i)t = t+ti$  con  $0 \leq t \leq 1$ , se tiene  $z'(t) = 1+i$  luego:

$$\int_C 3|z|^2 dz = \int_0^1 3[t^2+t^2](1+i) dt = 6(1+i) \int_0^1 t^2 dt = 2+2i.$$

También se pueden considerar curvas cerradas.

**Ejemplo 5.2.3.** Para calcular la integral

$$\int_{S^1} z dz$$

recorriendo la circunferencia unidad  $S^1$  en sentido positivo una vez, se puede tomar  $z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Luego  $z'(t) = i e^{it}$ , y así:

$$\int_{S^1} z dz = \int_0^{2\pi} e^{it} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{2it} dt = i \frac{e^{2it}}{2i} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} (e^{4\pi i} - e^0) = 0.$$

**Ejemplo 5.2.4.** Para mostrar que:

$$\int_{S^1} \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

se toma de nuevo  $z(t) = e^{it}$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ , luego  $z'(t) = i e^{it}$  y así:

$$\int_{S^1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

La primera pregunta matemática que se impone es si la definición de la integral es una “buena definición”, esto es, si ella no depende de la parametrización de la curva  $C$ .

**Ejemplo 5.2.5.** Para determinar la integral  $\int_C 3z^2 dz$ , otra parametrización del segmento de recta  $C$  de  $0$  a  $1+i$  es  $z(t) = (1+i)t^2$  con  $0 \leq t \leq 1$ . Ahora  $z'(t) = 2(1+i)t = (2+2i)t$ , luego:

$$\begin{aligned} \int_C 3z^2 dz &= \int_0^1 3 [(1+i)t^2]^2 (2+2i)t dt = \int_0^1 3(2i)t^4(2+2i)t dt \\ &= (-12+12i) \int_0^1 t^5 dt = (-12+12i) \left(\frac{1}{6}\right) = -2+2i. \end{aligned}$$

El valor obtenido es el mismo del ejemplo inicial.

**Ejemplo 5.2.6.** Para describir la circunferencia unidad  $S^1$  en sentido positivo una vez también se podría tomar  $z(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t = e^{2\pi i t}$  con  $0 \leq t \leq 1$ . Entonces  $z'(t) = 2\pi i e^{2\pi i t}$ , y ahora:

$$\int_{S^1} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i t}} 2\pi i e^{2\pi i t} dt = 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i t \Big|_0^1 = 2\pi i.$$

De nuevo, el resultado es el mismo para dos parametrizaciones distintas.

**Ejemplo 5.2.7.** Para describir la circunferencia unidad  $S^1$  en sentido negativo una vez se puede tomar  $z(t) = \cos(-t) + i \sin(-t) = \cos t - i \sin t = e^{-it}$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Entonces  $z'(t) = -i e^{-it}$ , y resulta:

$$\int_{-S^1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{-it}} (-i e^{-it}) dt = -i \int_0^{2\pi} dt = -2\pi i.$$

Ahora el resultado es el mismo pero con signo contrario.

En general, sea  $z : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función que recorre una vez la curva  $C$ . Si  $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  es una función tal que  $\phi(c) = a$ ,  $\phi(d) = b$  y además  $\phi'(s) > 0$  para cada  $s \in [c, d]$ , entonces la función  $\zeta = z \circ \phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  describe la misma curva  $C$  una vez. Ahora, tomando  $t = \phi(s)$ , resulta:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z(t))z'(t) dt &= \\ &= \int_c^d f(z(\phi(s)))z'(\phi(s))\phi'(s) ds = \int_c^d f(\zeta(s))\zeta'(s) ds, \end{aligned}$$

esto es:

$$\int_C f dz = \int_C f d\zeta.$$

En cambio, si  $\phi(c) = b$ ,  $\phi(d) = a$  y  $\phi'(s) < 0$  para cada  $s$ , entonces:

$$\int_C f dz = - \int_C f d\zeta.$$

Con esto se ha demostrado el resultado siguiente.

**Proposición 5.2.1.** *La integral  $\int_C f dz$  está bien definida en el sentido de que el valor  $\int_a^b f(z(t))z'(t) dt$  no depende de la función  $z$  que describe la curva  $C$ , salvo posiblemente el signo.*

El signo de la integral depende del sentido en el que se recorre la curva.

Aunque la integral no depende de la parametrización escogida para la curva, sí podría depender del camino escogido para ir del punto inicial al punto final.

**Ejemplo 5.2.8.** *Si  $C$  es el segmento de la parábola  $y = x^2$  de  $0$  a  $1 + i$ , resulta:*

$$\int_C 3z^2 dz = -2 + 2i.$$

En efecto, tomando  $z(t) = t + t^2i$  con  $0 \leq t \leq 1$ , se tiene  $z'(t) = 1 + 2ti$ , luego:

$$\begin{aligned} \int_C 3z^2 dz &= \int_0^1 3 [t + t^2i]^2 (1 + 2ti) dt \\ &= 3 \int_0^1 (t^2 - t^4 + 2t^3i)(1 + 2ti) dt \\ &= 3 \int_0^1 [(t^2 - 5t^4) + (4t^3 - 2t^5)i] dt \\ &= 3 \left( \frac{1}{3} - 1 \right) + 3 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) i. \end{aligned}$$

El resultado es el mismo del ejemplo inicial.

**Ejemplo 5.2.9.** De nuevo, si  $C$  es el segmento de la parábola  $y = x^2$  de  $0$  a  $1 + i$  entonces:

$$\int_C 3|z|^2 dz = \frac{8}{5} + \frac{5i}{2}.$$

Pues tomando  $z(t) = t + t^2i$  con  $0 \leq t \leq 1$  se tiene  $z'(t) = 1 + 2ti$ , luego:

$$\begin{aligned} \int_C 3|z|^2 dz &= \int_0^1 3(t^2 + t^4)(1 + 2ti) dt \\ &= 3 \int_0^1 [(t^2 + t^4) + (2t^3 + 2t^5)i] dt \\ &= 3 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + 3 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) i. \end{aligned}$$

En este caso, el resultado es muy distinto.

Cuando la integral es diferente por distintas trayectorias, se puede pensar que la integral por el camino cerrado obtenido al ir por una curva y volver por la otra no es cero; en contraste, si la integral es igual por ambas trayectorias, la integral por la curva cerrada sería cero. Estos dos casos son evidentes en los ejemplos calculados.

$$\int_{S^1} z dz = 0, \quad \text{mientras que} \quad \int_{S^1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

### 5.3. Propiedades de la integral

La idea de recorrer una curva en dos sentidos, o de ir y volver a lo largo de una misma curva, se puede precisar como sigue. Si la función  $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  describe la curva  $C$  una vez, entonces la función  $\tilde{z} : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$  definida como  $\tilde{z}(t) = z(-t)$  la describe en sentido contrario y se denota  $-C$ .

**Proposición 5.3.1.** *Con la terminología anterior, resulta:*

$$\int_{-C} f dz = - \int_C f dz.$$

*Demostración.* En efecto:

$$\int_{-C} f dz = \int_{-b}^{-a} f(\tilde{z}(t)) \tilde{z}'(t) dt = \int_{-b}^{-a} f(z(-t)) z'(-t) (-1) dt.$$

Sustituyendo  $s = -t$  se tiene  $ds = -dt$ , luego:

$$\int_{-C} f dz = \int_b^a f(z(s)) z'(s) ds = - \int_a^b f(z(s)) z'(s) ds = - \int_C f dz. \quad \square$$

De la misma manera se formaliza la idea de recorrer varias curvas una tras otra. Si la función  $z_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$  describe la curva  $C_1$  y  $z_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$  describe la curva  $C_2$ , con las condiciones adicionales  $b_1 = a_2$  (esto siempre se puede lograr) y  $z_1(b_1) = z_2(a_2)$ , de manera que las curvas son sucesivas, entonces la función  $z : [a_1, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$  definida como

$$z(t) = \begin{cases} z_1(t), & \text{si } a_1 \leq t \leq b_1, \\ z_2(t), & \text{si } a_2 \leq t \leq b_2. \end{cases}$$

describe primero la curva  $C_1$  y luego la  $C_2$ . Esta curva nueva se denota  $C = C_1 + C_2$ .

De manera similar se puede definir la suma de  $n$  curvas sucesivas  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , que se denota  $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$ . Además, resulta el hecho siguiente.

**Proposición 5.3.2.** *Con la terminología anterior, resulta:*

$$\int_C f dz = \int_{C_1} f dz + \int_{C_2} f dz + \dots + \int_{C_n} f dz.$$

*Demostración.* En el caso  $n = 2$  se tiene, para la parametrización mencionada:

$$\begin{aligned} \int_{C_1+C_2} f dz &= \int_{a_1}^{b_2} f(z(t))z'(t) dt = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(z_1(t))z'_1(t) dt + \int_{a_2}^{b_2} f(z_2(t))z'_2(t) dt \\ &= \int_{C_1} f dz + \int_{C_2} f dz. \end{aligned}$$

El caso general se deduce por inducción. □

**Ejemplo 5.3.1.** *A fin de calcular la integral  $\int_C 3z^2 dz$ , siendo  $C$  la unión de los segmentos de recta de 0 a 1 y de 1 a  $1+i$ , sea  $C_1$  el primer segmento y  $C_2$  el segundo.*

*Para el primer paso sea  $z_1(t) = t$  con  $0 \leq t \leq 1$ , entonces  $z'_1(t) = 1$  y así:*

$$\int_{C_1} 3z^2 dz = \int_0^1 3t^2 dt = 1.$$

*Para el segundo sea  $z_2(t) = 1 + it$  con  $0 \leq t \leq 1$ , de manera que  $z'_2(t) = i$  y se tiene:*

$$\begin{aligned} \int_{C_2} 3z^2 dz &= \int_0^1 3(1+it)^2 i dt = 3 \int_0^1 ((1-t^2) + 2ti) i dt \\ &= 3 \int_0^1 (-2t + (1-t^2)i) dt = 3 \left( -1 + \frac{2i}{3} \right) = -3 + 2i. \end{aligned}$$

Por fin, resulta

$$\int_C 3z^2 dz = \int_{C_1} 3z^2 dz + \int_{C_2} 3z^2 dz = 1 + (-3 + 2i) = -2 + 2i.$$

Una vez más, se obtiene el mismo valor de la integral por los distintos caminos escogidos en el apartado anterior.

**Ejemplo 5.3.2.** Ahora se quiere calcular la integral  $\int_C 3|z|^2 dz$ , siendo  $C$  la unión de los segmentos de recta de 0 a 1 y de 1 a  $1 + i$ .

Para el primer paso se toma  $z_1(t) = t$  con  $0 \leq t \leq 1$ , entonces  $z_1'(t) = 1$  y así:

$$\int_{C_1} 3|z|^2 dz = \int_0^1 3t^2 dt = 1.$$

Para el segundo, sea  $z_2(t) = 1 + it$  con  $0 \leq t \leq 1$ , así  $z_2'(t) = i$  luego:

$$\int_{C_2} 3|z|^2 dz = \int_0^1 3(1 + t^2)i dt = 3 \left(1 + \frac{1}{3}\right) i = 4i.$$

En conclusión:

$$\int_C 3|z|^2 dz = \int_{C_1} 3|z|^2 dz + \int_{C_2} 3|z|^2 dz = 1 + 4i.$$

Comparando con los resultados del apartado anterior, en el caso de esta función la integral tiene tres valores distintos para tres curvas diferentes de 0 a  $1 + i$ .

Como puede esperarse, la integral compleja es lineal.

**Proposición 5.3.3.** Sean  $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones de variable compleja integrables a lo largo de una curva  $C$  en  $D$ . Las siguientes integrales existen y tienen el valor que se indica:

1.  $\int_C (cf) dz = c \int_C f dz$ , aquí  $c \in \mathbb{C}$ ,
2.  $\int_C (f + g) dz = \int_C f dz + \int_C g dz$ .

*Demostración.* Si  $z : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  describe la curva  $C$ , entonces por una parte se tiene:

$$\begin{aligned} \int_C (cf) dz &= \int_a^b (cf)(z(t))z'(t) dt \\ &= \int_a^b cf(z(t))z'(t) dt \\ &= c \int_a^b f(z(t))z'(t) dt \\ &= c \int_C f dz, \end{aligned}$$

y, por otro lado:

$$\begin{aligned} \int_C (f + g) dz &= \int_a^b (f + g)(z(t))z'(t) dt \\ &= \int_a^b (f(z(t)) + g(z(t)))z'(t) dt \\ &= \int_a^b (f(z(t))z'(t) + g(z(t))z'(t)) dt \\ &= \int_a^b f(z(t))z'(t) dt + \int_a^b g(z(t))z'(t) dt \\ &= \int_C f dz + \int_C g dz. \end{aligned} \quad \square$$

También hay una acotación natural de la integral. Para las nociones de curva rectificable y longitud de curva, (véase el texto [1]).

**Proposición 5.3.4.** *Si la curva  $C$  es rectificable con longitud  $L$  y además se tiene  $|f(z)| \leq M$  para cada  $z \in C$  sobre la curva, entonces:*

$$\left| \int_C f dz \right| \leq ML.$$

Se nota que tal cota  $M$  siempre existe cuando  $f$  es continua, pues el intervalo  $[a, b]$  es compacto.

*Demostración.* Por la **proposición 5.1.7**, se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \int_C f dz \right| &= \left| \int_a^b f(z(t))z'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(z(t))z'(t)| dt = \int_a^b |f(z(t))||z'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b M|z'(t)| dt = M \int_a^b |z'(t)| dt = ML. \quad \square \end{aligned}$$

Observamos de manera informal que la función  $f(z) = 3z^2$  tiene como antiderivada la función  $F(z) = z^3$  y que

$$z^3 \Big|_0^{1+i} = (1+i)^3 - 0 = -2 + 2i,$$

que es el resultado de la integral por las tres curvas estudiadas en el apartado anterior y en este. En general, el cálculo de la integral se simplifica de manera considerable si se encuentra una antiderivada de la función, lo cual corresponde al teorema fundamental del cálculo.

**Proposición 5.3.5.** *Sea  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua y supóngase que existe una función  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ , derivable en  $D$ , tal que  $F'(z) = f(z)$  para cada  $z \in D$ . Entonces para cualquier curva  $C$  en  $D$  descrita por la parametrización  $z : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow D$  se tiene:*

$$\int_C f dz = F(z(t)) \Big|_a^b = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Se nota que en el término de la derecha no interviene para nada la curva  $C$ , solo sus puntos inicial y final. De esta manera, si  $C$  es cualquier curva contenida en  $D$  que va del punto  $z_1$  a  $z_2$ , se puede escribir:

$$\int_{z_1}^{z_2} f dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1).$$

*Demostración.* En efecto:

$$\begin{aligned} \int_C f dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t) dt = \int_a^b F'(z(t))z'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (F(z(t))) dt = F(z(b)) - F(z(a)), \end{aligned}$$

esta última igualdad por el teorema fundamental del cálculo.  $\square$

**Ejemplo 5.3.3.** Para todo entero  $n \neq -1$  y para cualesquier puntos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  se tiene:

$$\int_{z_1}^{z_2} z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1}.$$

**Corolario 5.3.1.** En particular, si la función  $f$  tiene antiderivada en su dominio  $D$  y  $C$  es cualquier curva cerrada contenida en  $D$  entonces:

$$\int_C f dz = 0.$$

*Demostración.* Como para una curva cerrada el punto inicial y final coinciden,  $z(a) = z(b)$ , de donde  $F(z(b)) = F(z(a))$  y la diferencia es nula.  $\square$

La **proposición 5.3.5** permite concluir de inmediato el método de integración por partes.

**Proposición 5.3.6.** Sean  $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones derivables en  $D$ . Entonces para cualquier curva  $C$  en  $D$  descrita por la parametrización  $z : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow D$  se tiene:

$$\int_C f(z)g'(z) dz = f(z)g(z) \Big|_a^b - \int_C f'(z)g(z) dz.$$

En particular, si  $C$  es cualquier curva cerrada contenida en  $D$  entonces:

$$\int_C f(z)g'(z) dz = - \int_C f'(z)g(z) dz.$$

## 5.4. El teorema de Cauchy

El célebre teorema integral de Cauchy constituye el corazón de la teoría de integración de funciones de variable compleja y se puede enunciar como sigue.

**Teorema 5.4.1.** *Si  $f$  es una función holomorfa en un abierto simplemente conexo  $H$ , entonces:*

$$\int_C f dz = 0,$$

para cualquier curva cerrada  $C$  contenida en  $H$ .

El enunciado que sigue es del todo equivalente, de manera que la integral de una función holomorfa no depende de la trayectoria.

**Proposición 5.4.1.** *Si  $f$  es una función holomorfa en un abierto simplemente conexo  $H$ , entonces:*

$$\int_{C_1} f dz = \int_{C_2} f dz$$

para cualesquier curvas  $C_1, C_2$  en  $H$  cuyos puntos inicial y final coinciden, respectivamente.

*Demostración.* Pues, en esas condiciones, la curva  $C_1 - C_2 = C_1 + (-C_2)$  es una curva cerrada contenida en  $H$ , de donde:

$$0 = \int_{C_1 - C_2} f dz = \int_{C_1} f dz + \int_{-C_2} f dz = \int_{C_1} f dz - \int_{C_2} f dz.$$

En el otro sentido, suponiendo este resultado, si  $C$  es una curva cerrada en  $H$ , sea  $z_0$  un punto cualquiera de  $C$ . Al tomar  $C_1$  como la curva  $C$  que comienza y termina en  $z_0$  y  $C_2$  la curva constante en el punto  $z_0$ , entonces

$$\int_C f dz = \int_{C_1} f dz = \int_{C_2} f dz = 0.$$

□

El teorema integral de Cauchy se puede extender de varias maneras a regiones más generales.

**Corolario 5.4.2.** *Si  $f$  es una función holomorfa en un abierto  $H$ , entonces:*

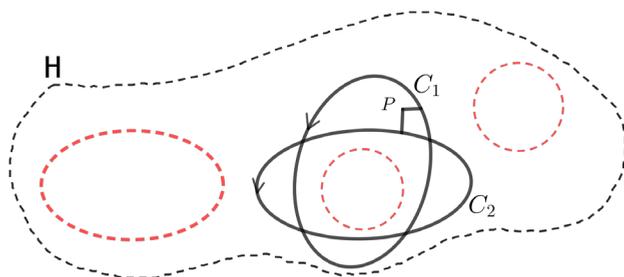
$$\int_C f dz = 0,$$

para cualquier curva cerrada  $C$  en  $H$  cuyo interior está contenido en  $H$ .

Es decir, el abierto  $H$  podría tener huecos pero la curva  $C$  no contiene ninguno de ellos.

*Demostración.* Como  $C$  es conexo, está contenido en una componente conexa de  $H$ ; como es compacto, está contenido en un abierto conexo contenido en  $H$  que incluye una franja de anchura positiva alrededor de la curva; la unión de este conexo con el interior de la curva es un abierto simplemente conexo  $H' \subseteq H$ . La función  $f$  es holomorfa en  $H'$  y se puede aplicar el teorema a esa región. □

Más aún, la integral a lo largo de una curva cerrada no depende de la trayectoria particular escogida, siempre que no cambien los huecos rodeados por la curva, (ver la **Figura 16**). Con precisión, se tiene el hecho siguiente.

**Figura 16:** Independencia de las trayectorias

**Corolario 5.4.3.** Si  $f$  es una función holomorfa en un abierto  $H$ , entonces:

$$\int_{C_1} f dz = \int_{C_2} f dz$$

para cualesquier curvas cerradas  $C_1, C_2$  en  $H$  recorridas en el mismo sentido y tales que la región comprendida entre las dos está contenida en  $H$ .

*Demostración.* Sea  $P$  una curva integrable (por ejemplo, poligonal) contenida en  $H$  que une la curva  $C_1$  con  $C_2$ . Entonces  $C = C_1 + P - C_2 - P$  es una curva cerrada cuyo interior también está contenido en  $H$ , luego:

$$0 = \int_C f dz = \int_{C_1} f dz + \int_P f dz - \int_{C_2} f dz - \int_P f dz,$$

de donde:

$$\int_{C_1} f dz = \int_{C_2} f dz. \quad \square$$

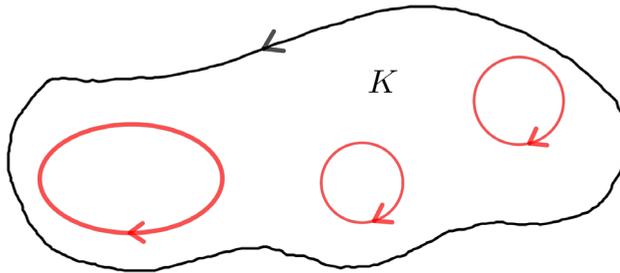
**Ejemplo 5.4.1.**  $\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i.$

En efecto, por el hecho probado,  $\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z-i} = \int_{|z-i|=1} \frac{dz}{z-i}.$  Por un

simple cambio de variable resulta  $\int_{|z-i|=1} \frac{dz}{z-i} = \int_{S^1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ .

Hay otro enunciado equivalente a los anteriores y muy común en los textos de cálculo con variable compleja, (ver [6]).

**Figura 17:** Sentido de las curvas



**Corolario 5.4.4.** Si  $f$  es una función holomorfa en un abierto múltiplemente conexo  $K$  y en su frontera  $\partial K$ , entonces:

$$\int_{\partial K} f dz = 0,$$

donde la curva se recorre en sentido positivo respecto a  $K$ .

En estas circunstancias, ver la **Figura 17**, si la región  $K$  tiene  $n$  huecos entonces la curva frontera  $\partial K$  está constituida por  $n + 1$  curvas simples: la curva exterior  $C_e$  y las  $n$  curvas interiores  $C_{i_j}$ , con  $1 \leq j \leq n$ , cada una de las cuales rodea un hueco. La curva exterior se recorre en sentido positivo y todas las interiores en el sentido contrario o negativo.

*Demostración.* Para el caso  $n = 1$ , sea de nuevo  $P$  una curva (poligonal) contenida en  $K$  que une la curva exterior  $C_e$  con  $C_i = C_{i_1}$ .

Entonces, por el teorema integral de Cauchy aplicado a la curva cerrada  $C = C_e + P + C_i - P$ , se tiene:

$$0 = \int_{C_e} f dz + \int_P f dz + \int_{C_i} f dz + \int_{-P} f dz,$$

de manera que:

$$\int_{\partial K} f dz = \int_{C_e} f dz + \int_{C_i} f dz = 0.$$

Para el caso general, se procede por inducción. □

A continuación se desarrolla la demostración del teorema de Cauchy bajo distintas hipótesis.

### • Derivadas parciales continuas (*Caso 1*)

En una primera versión se suponen condiciones adicionales sobre la función holomorfa que, en realidad, después se podrán demostrar siempre (véase el **corolario 5.5.2**).

Si una función de variable compleja  $f = u + iv$  tiene componentes  $u$  y  $v$  entonces haciendo  $z = x + iy$  resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_C f dz &= \int_a^b f(z) z' dt \\ &= \int_a^b (u + iv)(x' + iy') dt \\ &= \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (uy' + vx') dt \\ &= \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \end{aligned}$$

Estas expresiones recuerdan de inmediato un conocido resultado del cálculo en varias variables reales.

**Teorema 5.4.5** (Green). Sean  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  funciones reales con derivadas parciales continuas en una región cerrada y simplemente conexa  $R$  cuya frontera es la curva  $C$ . En tales condiciones:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

donde la curva  $C$  se recorre en sentido positivo.

En el caso de la función de variable compleja  $f = u + iv$ , si las componentes  $u$ ,  $v$  tienen derivadas parciales continuas entonces por el teorema de Green se obtiene esta igualdad:

$$\int_C f dz = \iint_R \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_R \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Pero si, además, se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, entonces:

- $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ , de donde  $-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ,
- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ , de donde  $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .

En consecuencia, ambas integrales dobles se anulan y así  $\int_C f dz = 0$ , con lo cual se ha demostrado el siguiente resultado.

**Teorema 5.4.6.** Si  $f$  es una función holomorfa con derivada continua en un abierto simplemente conexo  $H$ , entonces:

$$\int_C f dz = 0,$$

para cualquier curva cerrada  $C$  contenida en  $H$ .

• **Triángulos (Caso 2)**

En la segunda versión del teorema integral de Cauchy se suponen condiciones adicionales sobre la curva, que ahora se toma con una forma particular.

**Teorema 5.4.7.** *Sea  $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en el interior y en la frontera de un triángulo  $T$  contenido en el dominio  $D$ . Entonces:*

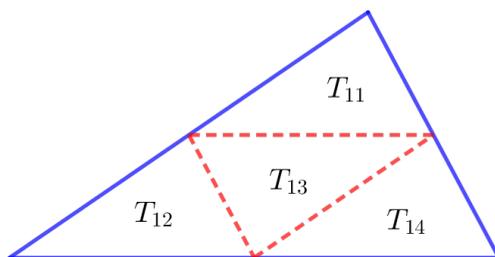
$$\int_C f dz = 0,$$

siendo  $C$  la frontera de  $T$ .

*Demostración.* Sea  $\Delta$  el diámetro del triángulo  $T$ , esto es la distancia máxima entre puntos del mismo, y sea  $L$  la longitud de  $C$ , esto es el perímetro del triángulo  $T$ . Se nota que  $\Delta = 0$  si y solo si  $L = 0$  y, en este caso, el triángulo  $T$  se reduce a un solo punto y el resultado es trivial. Por ello, en adelante se supone  $\Delta > 0$  y, por lo tanto,  $L > 0$ .

Uniando los puntos medios de los lados se forman cuatro triángulos congruentes  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{13}$  y  $T_{14}$ , cada uno con frontera correspondiente  $C_{1i}$ , ver la **Figura 18**

**Figura 18:** División del triángulo



Ahora se observa que, al integrar a lo largo de todos los subtrián-

gulos, las integrales sobre los segmentos internos se anulan. De esta manera:

$$\int_C f dz = \int_{C_{11}} f dz + \int_{C_{12}} f dz + \int_{C_{13}} f dz + \int_{C_{14}} f dz.$$

Sea  $T_1$  el triángulo tal que el valor absoluto de la integral es máximo entre estos cuatro y sea  $C_1$  su frontera. Entonces, por la desigualdad triangular, resulta:

$$\left| \int_C f dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_1} f dz \right|.$$

Se nota que el triángulo  $T_1$  tiene diámetro  $\Delta_1 = \frac{1}{2}\Delta$  y perímetro  $L_1 = \frac{1}{2}L$ .

Esta construcción se repite con  $T_1$  y luego con el triángulo obtenido  $T_2$ , y así sucesivamente resultando la sucesión de triángulos  $T_1, T_2, T_3, \dots$ . Para cada índice  $n$  se tiene:

$$\left| \int_C f dz \right| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f dz \right|,$$

además el triángulo  $T_n$  tiene diámetro  $\Delta_n = \frac{\Delta}{2^n}$  y perímetro  $L_n = \frac{L}{2^n}$ .

Como  $T_1 \supseteq T_2 \supseteq T_3 \supseteq \dots$  es una sucesión de conjuntos cerrados encajados, su intersección  $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$  no es vacía porque  $T$  es compacto. Dado que el diámetro  $\Delta_n$  tiende a cero, la intersección es un conjunto unitario. Sea entonces  $z_0 \in D$  tal que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n = \{z_0\}.$$

Puesto que la función  $f$  es holomorfa en  $z_0$ , existe la derivada  $f'(z_0)$ . Definiendo para cada  $z \neq z_0$  la función  $R$  como sigue:

$$R(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0),$$

resulta  $\lim_{z \rightarrow z_0} R(z) = 0$ . Ahora se tiene:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)R(z),$$

y como la función lineal  $f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$  es holomorfa en todo el plano  $\mathbb{C}$  con derivada continua, por el caso ya probado del teorema integral de Cauchy su integral a lo largo de cualquier curva cerrada es cero. En particular, para cada triángulo  $T_n$  se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{C_n} f(z) dz &= \int_{C_n} [f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)] dz + \int_{C_n} (z - z_0)R(z) dz \\ &= \int_{C_n} (z - z_0)R(z) dz. \end{aligned}$$

Ahora dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , también  $\frac{\varepsilon}{L\Delta} > 0$  y existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |z - z_0| < \delta$  entonces  $|R(z)| < \frac{\varepsilon}{L\Delta}$ . Si el entero  $n$  se toma suficientemente grande para que  $\Delta < 2^n\delta$ , entonces para cada  $z \in C_n$  se tiene  $|z - z_0| \leq \Delta_n = \frac{\Delta}{2^n} < \delta$ , de donde  $|R(z)| < \frac{\varepsilon}{L\Delta}$ . Por la desigualdad  $ML$  (proposición 5.3.4), resulta:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{C_n} (z - z_0)R(z) dz \right| \leq \\ &\leq \Delta_n \left( \frac{\varepsilon}{L\Delta} \right) L_n = \frac{\Delta}{2^n} \frac{\varepsilon}{L\Delta} \frac{L}{2^n} = \frac{\varepsilon}{4^n}, \end{aligned}$$

y, por lo tanto:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f(z) dz \right| \leq 4^n \frac{\varepsilon}{4^n} = \varepsilon.$$

Puesto que  $\varepsilon$  es arbitrario, se concluye que  $\left| \int_C f dz \right| = 0$  y, por lo tanto,  $\int_C f dz = 0$ . □

• **Dominio estrella (Caso 3)**

En la tercera versión del teorema de Cauchy considerada aquí, se suponen condiciones adicionales sobre el dominio de holomorfa, que ahora se toma con una forma especial. Un conjunto  $S$  del plano es una *estrella* si existe algún punto  $z_0 \in S$  tal que, para todo  $z \in S$ , el segmento de recta que une a  $z_0$  con  $z$  está contenido en  $S$ . Además de auténticas estrellas, esto incluye triángulos, cuadriláteros, óvalos, etcétera. Se nota que todo conjunto estrella es simplemente conexo.

**Lema 5.4.1.** *Si  $f$  es una función holomorfa en un abierto estrella  $H$ , entonces existe una función holomorfa  $F : H \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $F'(z) = f(z)$  para cada  $z \in H$ .*

Es decir, toda función holomorfa en un abierto estrella posee alguna antiderivada.

*Demostración.* Siendo  $z_0$  un punto de referencia de la estrella  $H$ , para cada  $z \in H$  se define:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw,$$

donde esta integral se calcula a lo largo del segmento de recta de  $z_0$  a  $z$ . Como  $H$  es un conjunto abierto, ver **Figura19**, para el punto  $z \in H$  existe  $r > 0$  tal que si  $|w - z| < r$  entonces  $w \in H$ . Para cualquier  $h \in \mathbb{C}$ , si  $|h| < r$ , el triángulo con vértices  $z_0, z, z + h$  está contenido en  $H$ . Luego,  $f$  es holomorfa en este triángulo y su frontera y, por la versión anterior del teorema, se tiene:

$$\int_{z_0}^{z+h} f(w) dw + \int_{z+h}^z f(w) dw + \int_z^{z_0} f(w) dw = 0,$$

todas las integrales a lo largo de segmentos de recta. Es decir:

$$\int_{z_0}^{z+h} f(w) dw - \int_{z_0}^z f(w) dw = - \int_{z+h}^z f(w) dw,$$

o bien:

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(w) dw,$$

de donde, para  $h \neq 0$ : ):

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(w) dw.$$

Ahora bien, con algo de elaboración se nota que el número complejo  $f(z)$  también se puede expresar como una integral desde  $z$  hasta  $z+h$ . Pues como  $z$  es constante para la variable  $w$ , se tiene:

$$\int_z^{z+h} f(z) dw = f(z) \int_z^{z+h} dw = hf(z),$$

luego, finalmente:

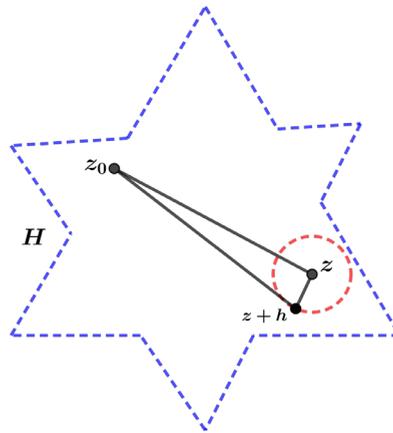
$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(w) dw - \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) dw \\ &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(w) - f(z)) dw. \end{aligned}$$

Como es holomorfa, la función  $f$  es continua en  $z$  y para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |w - z| < \delta$  implica  $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$ . Tomando  $\delta \leq r$  y  $|h| < \delta$ , se tiene  $0 < |w - z| < \delta$  para cada punto  $w$  en el segmento de recta entre  $z$  y  $z+h$ . Luego  $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$  para estos valores y, por la desigualdad *ML* (**proposición 5.3.4**), resulta:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} (f(w) - f(z)) dw \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$ , lo cual significa que la función  $F$  es derivable en  $z$  con  $F'(z) = f(z)$ .  $\square$

**Figura 19:** Dominio estrella



**Teorema 5.4.8.** *Si  $f$  es una función holomorfa en un abierto estrella  $H$  entonces:*

$$\int_C f dz = 0,$$

*para cualquier curva cerrada  $C$  contenida en  $H$ .*

*Demostración.* Por los resultados anteriores. □

## 5.5. La fórmula integral de Cauchy

Un resultado sorprendente y muy especial de la teoría de funciones de variable compleja es que el valor de una función holomorfa en un punto interior a una curva cerrada está determinado completamente por los valores que toma la función a lo largo de la curva. Con precisión, eso se expresa en la siguiente igualdad conocida como *fórmula integral de Cauchy*.

**Teorema 5.5.1.** *Sea  $f$  una función holomorfa en una región  $D$ , sea  $C$  una curva cerrada contenida en  $D$  y sea  $z_0$  un punto en la componente*

interior de esta curva. En tales condiciones se tiene:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

*Demostración.* Sea  $S$  una circunferencia de centro  $z_0$  y radio  $r$  contenida en el interior de la curva  $C$ . Entonces por el corolario 5.4.3 tenemos:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_S \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \int_S \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_S \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= f(z_0) \int_S \frac{dz}{z - z_0} + \int_S \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= 2\pi i f(z_0) + \int_S \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \end{aligned}$$

Siendo  $f$  continua en  $z_0$  por ser holomorfa, dado  $\varepsilon > 0$  también  $\frac{\varepsilon}{2\pi} > 0$  y existe  $\delta > 0$  tal que si tomamos  $r = |z - z_0| < \delta$  entonces  $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ , de donde  $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi r}$ . Ahora por la desigualdad *ML* (**proposición 5.3.4**), y teniendo en cuenta que la longitud de la circunferencia  $S$  es  $2\pi r$ , obtenemos:

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \int_S \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi r} (2\pi r) = \varepsilon.$$

Con  $\varepsilon$  arbitrario, el valor absoluto de la diferencia es cero y resulta la igualdad buscada.  $\square$

A partir de la fórmula de Cauchy, se puede demostrar una fórmula similar para la función derivada.

**Proposición 5.5.1.** *En las condiciones del teorema 5.5.1 tenemos:*

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

Así que los valores de la derivada también dependen de los valores que toma la función *original* a lo largo de la curva.

*Demostración.* Sea  $h \in \mathbb{C}$  tal que  $|h| < \frac{r}{2}$ . Por la fórmula de Cauchy (**teorema 5.5.1**) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{2\pi i h} \int_C \left( \frac{f(z)}{z - z_0 - h} - \frac{f(z)}{z - z_0} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz. \end{aligned}$$

Ahora

$$\frac{1}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} = \frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{h}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2},$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} + \frac{h}{2\pi i} \int_S \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} dz, \end{aligned}$$

en la última integral se ha cambiado la curva  $C$  por la circunferencia  $S$ . Dado que este conjunto  $S$  es compacto y la función  $f$  es continua, la imagen de  $S$  por  $f$  es compacta y, en particular, es un conjunto acotado. Sea  $M > 0$  real tal que  $|f(z)| \leq M$  para cada  $z \in S$ , se nota que para estos mismos puntos se tiene  $|z - z_0 - h| \geq |z - z_0| - |h| = r - |h| > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$ , y así:

$$\left| \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} \right| < \frac{M}{\left(\frac{r}{2}\right)r^2} = \frac{2M}{r^3},$$

para cada  $z \in S$ . En consecuencia, por la desigualdad  $ML$  (**proposición 5.3.4**) tenemos:

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \frac{2M}{r^3} (2\pi r) = \frac{2M}{r^2} |h|.$$

Ahora existe el límite cuando  $h$  tiende a cero, y la derivada  $f'(z_0)$  toma el valor indicado en el enunciado.  $\square$

Este proceso que aplicamos a la función se puede repetir con la función derivada, lo cual tiene importantes consecuencias teóricas.

**Proposición 5.5.2.** *En las condiciones del teorema 5.5.1 tenemos:*

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz.$$

*Demostración.* De nuevo para  $|h| < \frac{r}{2}$ , y por los resultados anteriores:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f'(z_0 + h) - f'(z_0)}{h} - \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz \right| = \\ & = \left| \frac{1}{2\pi i h} \int_C \left[ \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)^2} - \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} - \frac{2hf(z)}{(z - z_0)^3} \right] dz \right| \\ & = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{h} \left[ \frac{(z - z_0)^3 - (z - z_0 - h)^2(z - z_0) - 2h(z - z_0 - h)^2}{(z - z_0 - h)^2(z - z_0)^3} \right] dz \right| \\ & = \frac{1}{2\pi} \left| \int_S \frac{f(z)}{h} \left[ \frac{3(z - z_0)h^2 - 2h^3}{(z - z_0 - h)^2(z - z_0)^3} \right] dz \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{|h|} \frac{3r|h|^2 + 2|h|^3}{\left(\frac{r}{2}\right)^2 r^3} (2\pi r) = \frac{4M}{r^4} (3r|h| + 2|h|^2). \end{aligned}$$

El límite cuando  $h$  tiende a cero existe y la segunda derivada  $f''(z_0)$  toma el valor indicado.  $\square$

En primer lugar, esto significa que la función derivada  $f'(z)$  también es derivable en el abierto  $D$ , luego también es holomorfa.

**Corolario 5.5.2.** *Si la función de variable compleja  $f$  es holomorfa en un dominio  $D$ , entonces existen todas las derivadas de  $f$  en  $D$  y son holomorfas en ese dominio.*

Esto implica en particular la **nota 4.3.1**, que se aceptó sin prueba. Ahora, más que eso, podemos dar una expresión precisa para todas las derivadas que, en realidad, dependen de los valores que toma la función en la curva. La igualdad que sigue es la *fórmula integral general de Cauchy*.

**Proposición 5.5.3.** *En las condiciones del teorema 5.5.1, para cada entero  $k \geq 0$  tenemos:*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

*Demostración.* Por inducción sobre  $k$ . Para  $k = 0$  es la fórmula de Cauchy (**teorema 5.5.1**). Suponiendo la validez de la fórmula para  $k$ , tenemos:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(z_0) &= (f')^{(k)}(z_0) = \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{k!}{2\pi i} (k+1) \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+2}} dz, \end{aligned}$$

la última igualdad por integración por partes (**proposición 5.3.6**). En consecuencia, obtenemos:

$$f^{(k+1)}(z_0) = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+2}} dz,$$

lo cual completa el paso inductivo. □

La fórmula general se puede utilizar para calcular con facilidad muchas integrales.

**Ejemplo 5.5.1.** Si  $C$  es la circunferencia de radio 4 y centro el origen entonces:

$$\int_C \frac{\operatorname{sen} z}{(z - \pi)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \operatorname{sen}''(\pi) = -\pi i \operatorname{sen}(\pi) = 0.$$

**Ejemplo 5.5.2.**

$$\int_{S^1} \frac{e^z + \operatorname{sen} z}{z} dz = 2\pi i (e^0 + \operatorname{sen} 0) = 2\pi i.$$

## Ejercicios para el capítulo 5

**5.1.** Encuentre una parametrización para los siguientes segmentos de recta:

a) De 0 a  $3 + 4i$ ,

b) de  $3 + 4i$  a  $2 + 5i$ ,

c) de 0 a  $z_1$ ,

d) de  $z_1$  a  $z_2$ .

**5.2.** Encuentre una parametrización para la elipse con ecuación cartesiana:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

**5.3.** Con la definición de integral, pruebe que  $\int_{S^1} z^n dz = 0$  para todo entero  $n \neq -1$ .

**5.4.** Encuentre la integral  $\int_C \bar{z} dz$  para cada una de las siguientes curvas  $C$ :

a)  $z(t) = 1 + it, 0 \leq t \leq 2,$

b)  $z(t) = 1 - t + it, 0 \leq t \leq 1,$

c)  $z(t) = e^{it} - 1, 0 \leq t \leq 2\pi.$

**5.5.** Evalúe la integral  $\int_C \Re(z) dz$  para cada una de las siguientes curvas:

a)  $C$  es el segmento de recta desde el origen hasta  $1 + i,$

b)  $C$  es la porción de la parábola  $y = x^2$  desde 0 hasta  $1 + i.$

**5.6.** Muestre que  $\int_C (2\bar{z} - 1) dz = 2i,$  si  $C$  recorre el triángulo con vértices 0, 1,  $i$  en ese orden.

**5.7.** Muestre que, siendo  $S^1$  la circunferencia unidad,

$$\left| \int_{S^1} \frac{dz}{3 + 5z^2} \right| \leq \pi.$$

**5.8.** Evalúe las siguientes integrales por cualquier curva que una los puntos. Observe que en realidad no es necesario encontrar parametrización alguna.

a)  $\int_0^{1+i\sqrt{3}} 3z^2 dz,$       b)  $\int_0^{\pi i} e^z dz,$       c)  $\int_{-11}^{-10} \frac{dz}{(z+9)^2}.$

**5.9.** Encuentre las siguientes integrales. Puede utilizar el teore-

ma de Cauchy (cuando aplique) y también la igualdad  $\frac{1}{z^2 + 9} = \frac{1}{6i} \left( \frac{1}{z - 3i} - \frac{1}{z + 3i} \right)$ .

$$\text{a) } \int_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2 + 9}, \quad \text{b) } \int_{|z-2i|=2} \frac{dz}{z^2 + 9}.$$

**5.10.** Encuentre  $\int_{S^1} f(z) dz$  para las siguientes funciones.

$$\text{a) } f(z) = \frac{e^z}{z - 2i}, \quad \text{b) } f(z) = z^4 + iz + \Im m(z).$$

**5.11.** Sean  $a, b \in \mathbb{C}$  números complejos y  $r > 0$  un radio real positivo. Descomponiendo en fracciones parciales y utilizando el teorema de Cauchy, muestre que:

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \begin{cases} 0, & \text{si } |a| < r \text{ y } |b| < r, \\ \frac{2\pi i}{a-b}, & \text{si } |a| < r < |b|, \\ \frac{2\pi i}{b-a}, & \text{si } |b| < r < |a|, \\ 0, & \text{si } |a| > r \text{ y } |b| > r. \end{cases}$$

**5.12.** Encuentre  $\int_{S^1} f(z) dz$  para las siguientes funciones.

$$\text{a) } f(z) = \frac{e^z}{z - 2i}, \quad \text{b) } f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2}.$$

# Bibliografía

- [1] Apostol TM. Mathematical Analysis. 2nd ed. Reading: Addison-Wesley; 1974.
- [2] Bartle RG, Sherbert DR. Introduction to Real Analysis. 4th ed. John Wiley & Sons; 2011. Available from: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=1A7AC55B016CC56C99944370B68F1E4A>.
- [3] Rudin W. Principles of Mathematical Analysis. 3rd ed. New York: McGraw-Hill; 1976.
- [4] Rudin W. Análisis real y complejo. tercera ed. Madrid: McGraw-Hill; 1988.
- [5] Homann J. Riemann Surface of  $\text{Log}[z]$ , projection from 4dim  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  to 3dim  $\mathbb{C} \times \text{Im}(\mathbb{C})$ , color is argument; 2007. Available from: [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Riemann\\_surface\\_log.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Riemann_surface_log.jpg).
- [6] Conway JB. Functions of One Complex Variable. vol. 11 of Graduate Texts in Mathematics. 2nd ed. New York: Springer-Verlag; 1973.
- [7] Ahlfors LV. Complex Analysis. 3rd ed. New York: McGraw-Hill; 1979.
- [8] Arnold DN. Graphics for Complex Analysis; 2006. Pennsylvania State University. <http://www.ima.umn.edu/~arnold/complex.html>.

- [9] Bak J, Newman DJ. Complex Analysis. 3rd ed. New York: Springer Science+Business Media; 2010.
- [10] Charris J, de Castro R, Varela J. Fundamentos del Análisis Complejo de una variable. Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias; 2000.
- [11] Conway JB. Functions of One Complex Variable II. vol. 159 of Graduate Texts in Mathematics. Springer Science & Business Media; 1995.
- [12] Freitag E, Busam R. Complex Analysis. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag; 2009.
- [13] Grove EA, Ladas GE. Introduction to Complex Variables. Boston: Houghton Mifflin; 1974.
- [14] Lang S. Complex Analysis. vol. 103 of Graduate Texts in Mathematics. 4th ed. New York: Springer Science+Business Media; 1999.
- [15] Markushevich AI. Teoría de las funciones analíticas. Moscú: Editorial Mir; 1970. 2 tomos.
- [16] Marsden JE, Hoffman MJ. Basic Complex Analysis. 3rd ed. New York: W. H. Freeman; 1999.
- [17] Needham T. Visual Complex Analysis. Oxford: Clarendon Press; 1997.
- [18] Palka BP. An Introduction to Complex Function Theory. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag; 1991.
- [19] Ponnusamy S, Silverman H. Complex Variables with Applications. Boston: Birkhäuser; 2006.
- [20] Priestley HA. Introduction to Complex Analysis. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press; 2003.
- [21] Spivak M. Cálculo infinitesimal. México: Reverté; 1996.
- [22] Stein EM, Shakarchi S. Complex Analysis. vol. 2 of Princeton Lectures in Analysis. Princeton: Princeton University Press; 2003.

- [23] Takeuchi Y. Variable compleja en 3 semanas. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia; 1978.



# Índice de palabras

- Adherencia**, 42  
**Apolonio**, 27  
**Argumento**, 18  
**Circunferencia**  
 unidad, 62  
**Conjuntoabierto**,40  
 acotado, 43  
 cerrado, 41  
 compacto, 43  
 conexo, 44  
 estrella, 131  
 simplementeconexo,  
 44  
**Coordenadas**  
 cartesianas, 13  
 polares, 16  
**Criterio de**  
**convergencia**de la  
 raíz, 51  
 del cociente, 51  
**Curvacerrada**,106  
 compleja, 105  
 de Jordan, 106  
 derivable, 108  
 integrable, 109  
 orientaciónde,106  
 parametrizaciónde,  
 105  
 simple, 106  
**Desigualdad**  
 triangular, 14  
**Disco abierto**, 26  
 cerrado, 40  
**Ecuaciones de**  
**Cauchy-Riemann**,90  
**Ecuación de la**  
**circunferencia**,26  
 de la elipse, 28  
 de la hipérbola, 28  
 de la mediatriz, 24  
 de la recta, 23  
 de Laplace, 99  
**Forma polar**, 17  
**Funciónanalítica**,96  
 armónica, 99  
 conjugado, 11, 58  
 continua, 85  
 coseno, 70  
 cuadrática, 59  
 devARIABLECOMPLEJA,  
 55  
 derivable, 86  
 entera, 96  
 exponencial, 66  
 holomorfa, 96  
 inversoMULTIPLICATIVO,  
 61  
 lineal, 56  
 logaritmoPRINCIPAL,  
 75  
 periódica, 68  
 racional, 60  
 seno, 70

- valor absoluto, 11**  
**Fórmula de Moivre, 20**  
**de Euler, 67**  
**de las raíces de un complejo, 21**  
**integral de Cauchy, 134**  
**integral general de Cauchy, 137**  
**Homotecia, 57**  
**Integral, 111**  
**Interior, 42**  
**Ley del paralelogramo, 13**  
**Límite de función, 83**  
**de sucesión, 45**  
**Multifunción logarítmica, 78**  
**Métrica, 40**  
**Números complejos, 9**  
**Parte imaginaria, 10**  
**real, 10**  
**Plano extendido, 28**  
**Poligonal, 26**  
**Proyección estereográfica, 31**  
**Radios de convergencia, 52**  
**Rama del logaritmo, 77**  
**Raíces de la unidad, 21**  
**Reflexión, 58**  
**Región, 44**  
**Representación polar, 16**  
**rectangular, 13**  
**Rotación, 57**  
**Segmento, 25**  
**Serie absolutamente convergente, 51**  
**convergente, 48**  
**de potencias, 52**  
**definición de, 48**  
**geométrica, 49**  
**Subsucesión, 45**  
**Sucesión**  
**convergente, 45**  
**definición de, 45**  
**Superficie de Riemann, 78**  
**Teorema de Cauchy, 122**  
**de Green, 127**  
**de Jordan, 106**  
**Topología, 40**  
**Transformación de Cayley, 63**  
**de Möbius, 62**  
**Traslación, 57**

# Índice de símbolos

$S^{adh}$  Adherencia del conjunto  $S$ . 42

$\arg$  Ángulo del complejo. 18

$\mathbb{C}_\infty$  Plano extendido. 28

$S^1$  Circunferencia Unidad. 62

$\text{cis}$  Forma polar. 17, 26

$C^c$  Complemento del conjunto  $C$ . 41

$\bar{z}$  Conjugado de  $z$ . 11, 12, 58

$B(z_0, \epsilon)$  Disco abierto con centro  $z_0$  y radio  $\epsilon$ . 40

$\bar{B}(z_0, \epsilon)$  Disco cerrado con centro  $z_0$  y radio  $\epsilon$ . 40, 43

$\mathcal{S}$  Esfera de Rieman. 28

$SL_2(\mathbb{C})$  Grupo Lineal de Matrices con Determinante 1. 65

$S^{int}$  Interior del conjunto  $S$ . 42

$\mathbb{C}$  Números complejos. 9, 10

$i$  Número imaginario. 10

$\mathbb{R}$  Números reales. 10

$\Im$  Parte imaginaria. 10, 12, 15, 18, 23–25, 36, 46, 49, 63, 78, 79, 95–97, 102, 140

$\Re$  Parte real. 10, 12, 14, 15, 18, 23–25, 36, 40, 42, 46, 49, 78, 85, 87, 91, 95–97, 102, 110, 111, 139

$\mathbb{R}^2$  Plano real. 9

$|z|$  Valor absoluto de  $z$ . 11

$\emptyset$  Conjunto vacío. 40–43



## **Luis Eduardo Olivar Robayo**

Es Licenciado en Matemáticas y Física, Magister en Matemáticas y Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Valle Colombia. Sus áreas de interés son los problemas inversos, el análisis funcional y la variable compleja. Es autor de artículos y de libros de análisis numérico y cálculo. Es profesor de planta del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad del Tolima desde 2001.

**E**ste libro constituye una invitación a la apasionante área del análisis complejo. Partiendo desde las bases más sencillas de los números complejos y con un marcado enfoque geométrico, se presentan los elementos del cálculo diferencial e integral con funciones de una variable compleja.

ISBN: 978-628-7537-53-8



Universidad  
del Tolima



ACREDITADA  
DE ALTA CALIDAD

**¡Construimos la universidad que soñamos!**