

SOBRE LA GLOBALIZACIÓN DE UNA ACCIÓN PARCIAL

DANIEL ROLANDO OVALLE PEÑA

Cód. 0702 0010 2010

JAVIER ESNEIDER MÉNDEZ ALFONSO

Cód. 0702 0004 2010

Trabajo de grado para optar por el título de
Profesional en Matemáticas con énfasis en Estadística.

Director

JESÚS ANTONIO ÁVILA GUZMÁN

Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA.

FACULTAD DE CIENCIAS.

MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA.

IBAGUÉ

2015



UNIVERSIDAD DEL TOLIMA

FACULTAD DE CIENCIAS

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN TRABAJO DE GRADO

TÍTULO: SOBRE LA GLOBALIZACIÓN DE UNA ACCIÓN PARCIAL

AUTORES: DANIEL ROLANDO OVALLE PEÑA, CÓDIGO 070200102010
JAVIER ESNEIDER MÉNDEZ ALFONSO, CÓDIGO 070200042010

DIRECTOR: JESÚS ANTONIO ÁVILA GUZMÁN

JURADOS: JUAN PABLO YAÑEZ PUENTES
HÉCTOR PINEDO TAPIA

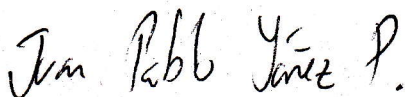
CALIFICACIÓN: 4.7 (Cuatro Punto Siete)

 X APROBO

 REPROBO

OBSERVACIONES: TRABAJO MERITORIO

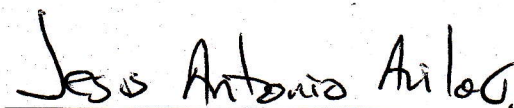
FIRMAS



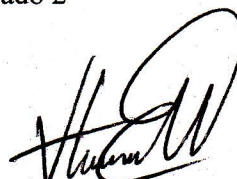
JUAN PABLO YAÑEZ PUENTES
Jurado 1



HÉCTOR PINEDO TAPIA
jurado 2



JESÚS ANTONIO ÁVILA GUZMÁN
Director del Trabajo



HORACIO MOLANO ESPINOSA
Director del Programa

Ciudad y fecha: Ibagué, 15 de mayo de 2015

Advertencia

“La Facultad de Ciencias y el jurado calificador, no son responsables de los conceptos ni ideas expuestas por los autores del siguiente trabajo” (Artículo 11, acuerdo 018 de 1984 del Concejo Directivo de la Universidad del Tolima).

Acuerdo 066 del Concejo Académico de la Universidad del Tolima por el cual adopta la norma ICONTEC relacionada con presentación de Tesis y Trabajos de Grado.

Artículo Cuarto

Los autores autorizan a la Universidad del Tolima la reproducción total o parcial de este documento, con la debida cita de reconocimiento de la autoría y cedemos a la Universidad los derechos patrimoniales, con fines de investigación, docencia e institucionales, consagrados en el artículo 72 de la ley 23 de 1982 y las normas que lo instituyan o modifiquen.

Dedicatorias

*A Dios por habernos permitido llegar hasta este punto, brindándonos salud para
lograr nuestros objetivos, además de su infinita bondad y amor.*

A nuestros padres, quienes incansablemente nos han apoyado en todo momento.

Agradecimientos

A Jesús Antonio Ávila por su apoyo, su paciencia y tranquilidad para la elaboración de este trabajo de grado.

Al profesor Juan Pablo Yañez por su motivación constante para la culminación de nuestros estudios profesionales.

A todos aquellos que participaron de manera directa o indirecta en la elaboración de este documento.

Resumen

Sobre la globalización de una acción parcial

En este trabajo se presentan algunos aspectos teóricos de las categorías y los funtores. Se presentan también las acciones globales y parciales de grupos sobre conjuntos, donde realizamos la demostración formal de que toda acción parcial proviene de la restricción adecuada de una acción global (globalización). Finalmente, usando terminología categórica, mostramos que esta globalización puede ser vista como un funtor entre algunas categorías adecuadas.

Palabras Claves: Categoría, funtor, acción global, acción parcial, globalización.

Abstract

Partial actions of groups on sets

In this work we present some theoretical aspects of categories. We also present the global and partial actions of groups on sets and prove, with details, that each partial action is the restriction of some global action which is called globalization. Finally, by using categorical concepts we prove that the globalization is a functor between the category of partial actions and the category of global actions.

Key Words: Category, functor, global action, partial action, globalization.

Tabla de Contenido

Introducción	1
Objetivos	3
1. Categorías	4
1.1. Aspectos Básicos	4
1.1.1. Ejemplos de Categorías	6
1.2. Funtores	9
1.2.1. Ejemplos De Funtores	10
2. Acciones Globales y Parciales de Grupos sobre Conjuntos	17
2.1. Acciones Globales	17
2.2. Definición de Acción Parcial	19
3. Categoría de Acciones Globales y Parciales	36
3.1. Categoría de Acciones Globales	36
3.2. Categoría de Acciones Parciales	38
3.3. Relaciones Funtoriales	39
Conclusiones	43
Referencias Bibliográficas	43

Introducción

La teoría de categorías, que fue presentada inicialmente por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en la década de 1940s ([8]), presenta un lenguaje muy útil y novedoso para las matemáticas con el cual ha sido posible generalizar muchas nociones bien conocidas como productos, cocientes, estructuras libres entre muchas otras. Tal vez lo más importante y más bonito de las categorías es que permite encontrar relaciones entre estructuras que en principio se consideraron distanciadas; recordemos la relación existente entre espacios topológicos y grupos vía el grupo fundamental, la relación entre los espacios topológicos T_0 y los conjuntos ordenados vía el orden de especialización ó la relación entre los anillos y los espacios topológicos vía su espectro primo. De ahí que la teoría de categorías trate de introducir una nueva forma de ver las matemáticas, de encontrar un formalismo adecuado que permita el paso de un tipo de estructura matemática a otro ([4]).

Las acciones globales de grupos sobre conjuntos, surgen a partir de los trabajos de Lagrange y Galois sobre el problema de la solución de polinomios por radicales. Su estudio ha sido de gran importancia para las matemáticas, pues ha dado origen a varios tipos de anillos como skew anillos de grupos, productos cruzados y nociones generalizadas de polinomios, entre otros.

Por otra parte, las acciones parciales son un tema reciente, pues se han desarrollado en los últimos 17 años y han mostrado ser una muy buena generalización de las

acciones globales. La definición formal de este concepto fue dada por R. Exel en [9], después F. Abadie en su tesis doctoral ([1]) dio inicio al estudio de las acciones envolventes de una acción parcial, al igual que Kellendonk y Lawson en ([14]). Así mismo, han surgido estudios recientes sobre aplicaciones de las acciones parciales en anillos ([7],[10]), en espacios métricos y topológicos ([14]), en teoría de homotopía ([22]), en teoría de operadores, en sistemas dinámicos entre muchos otros (ver [5] [10] [14] [3]).

Ahora bien, ya que la teoría de acciones globales es bien conocida y la de acciones parciales se ha venido desarrollando recientemente, fue natural construir y estudiar la categoría de acciones globales y parciales de grupos sobre conjuntos. En este sentido sería muy interesante determinar si la envolvente o globalización de una acción parcial puede verse como un funtor entre las dos categorías.

En el Capítulo 1 se presenta la teoría básica sobre categorías y funtores. En particular se estudian algunos ejemplos que ayudan a entender el concepto tan abstracto de categoría y de algunas relaciones funtoriales que se pueden realizar entre cada una de estas.

En el Capítulo 2 se presenta la teoría fundamental de las acciones globales y parciales de grupos sobre conjuntos, algunos aspectos básicos y ejemplos. Algunos resultados importantes para nuestro trabajo se dan a conocer, en particular, se presenta de manera detallada la construcción de la globalización de una acción parcial. En otras palabras, se muestra en detalle que toda acción parcial proviene de la restricción adecuada de una acción global.

En el Capítulo 3 se realiza la construcción de las categorías de acciones globales y parciales sobre conjuntos. Finalmente se muestra que la globalización es realmente un funtor que va de la categoría de acciones parciales a la categoría de acciones globales. Del mismo modo, se muestra que existe un funtor inclusión de la categoría de acciones globales a la categoría de acciones parciales.

Objetivos

Objetivo General

Estudiar la globalización de una acción parcial.

Objetivos Específicos

- Hacer una revisión bibliográfica acerca de teoría de categorías y de funtores.
- Revisar lecturas sobre acciones globales y acciones parciales.
- Verificar que toda acción global es una acción parcial.
- Comprobar que la restricción adecuada de una acción global, resulta ser una acción parcial.
- Verificar que toda acción parcial posee una única y mínima globalización.
- Estudiar la categoría de acciones globales y la categoría de acciones parciales.
- Probar que la relación existente entre la categoría de acciones globales y la de acciones parciales resulta ser un funtor.
- Probar que la relación existente entre la categoría de acciones parciales y la de acciones globales también es un funtor.

Capítulo 1

Categorías

Este capítulo está dedicado a estudiar las nociones básicas de categorías, ilustrándolas con algunos ejemplos clásicos como la categoría *Conj*, *Top*, *Vec*, entre otros. Además se definen los funtores, y se presentan algunos ejemplos de ellos. Más detalles sobre esta teoría pueden ser consultados en [18].

1.1. Aspectos Básicos

Definición 1.1. Una categoría C se define por:

1. Una colección no vacía cuyos elementos se llaman objetos. Esta colección se denota por $Ob(C)$.
2. Una colección no vacía de conjuntos disjuntos y eventualmente vacíos:

$$\{Mor_C(X, Y)\}_{X, Y \in Ob(C)}.$$

Los elementos del conjunto $Mor_C(X, Y)$ se denominan morfismos del objeto X en el objeto Y y se denota también por $Mor(X, Y)$. Un elemento de $Mor(X, Y)$ se representa por $f : X \rightarrow Y$ o sencillamente $X \rightarrow Y$. El objeto X se llama el dominio del morfismo f , mientras que Y se llama codominio.

La reunión de todos los conjuntos de morfismos de C será denotado por $Mor(C)$.

Esto es,

$$Mor(C) = \bigcup_{X,Y \in Ob(C)} Mor(X,Y).$$

3. Una operación entre morfismos llamada composición, tal que si X, Y, Z son objetos de C , $f \in Mor(X, Y)$ y $g \in Mor(Y, Z)$ existe un único morfismo $g \circ f \in Mor(X, Z)$:

$$Mor(X, Y) \times Mor(Y, Z) \rightarrow Mor(X, Z)$$

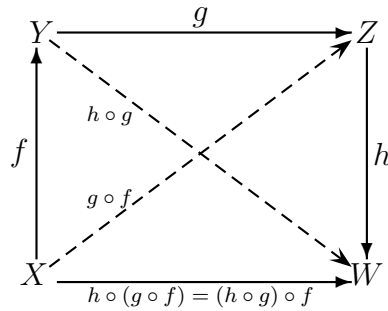
$$(f, g) \mapsto g \circ f.$$

La operación $\circ$ cumple las siguientes condiciones:

- a) Es asociativa, es decir, dados $f \in Mor(X, Y)$, $g \in Mor(Y, Z)$ y $h \in Mor(Z, W)$ se cumple:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

La propiedad asociativa garantiza que el siguiente diagrama conmuta:

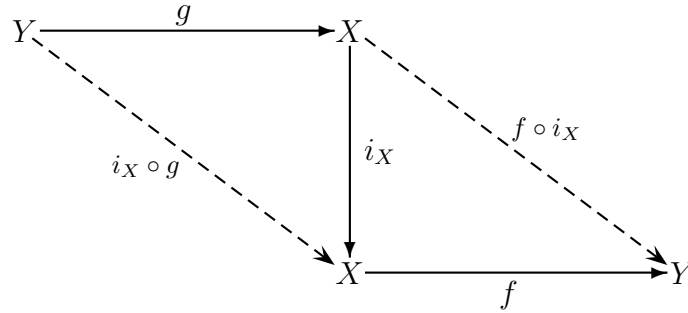


- b) Para cada objeto X en C existe un morfismo identidad $i_X \in Mor(X, X)$ tal que

$$f \circ i_X = f, i_X \circ g = g$$

para todo $f \in \text{Mor}(X, Y)$ y todo $g \in \text{Mor}(Y, X)$.

La existencia del morfismo identidad garantiza que el siguiente diagrama conmuta:



Proposición 1.1. Para cada objeto $X \in \text{Ob}(C)$, existe un único morfismo identidad $i_X \in \text{Mor}(X, X)$.

Demostración. Si $\sigma_X \in \text{Mor}(X, X)$, es otro morfismo identidad de X , entonces para todo $f \in \text{Mor}(X, Y)$ y para todo $g \in \text{Mor}(Y, X)$ se tiene:

$$f \circ \sigma_X = f \quad \sigma_X \circ g = g.$$

En particular, para $i_X \in \text{Mor}(X, X)$

$$i_X \circ \sigma_X = i_X \quad \text{y} \quad \sigma_X \circ i_X = i_X$$

$$i_X \circ \sigma_X = \sigma_X \circ i_X$$

$$\sigma_X = i_X.$$

Por lo tanto, la identidad es única. □

1.1.1. Ejemplos de Categorías

En esta sección mostramos algunos ejemplos clásicos de categorías relacionados con conjuntos, grupos, espacios topológicos, etc. Otros no tan clásicos son presentados, de tal forma que ayuden a entender el concepto de categoría.

Ejemplo 1.1. La categoría de los conjuntos denotada $Conj$, está constituida por:

1. $Ob(Conj)$: Colección de todos los conjuntos.
2. Para $X, Y \in Ob(Conj)$,
 $Mor(X, Y)$: Colección de todas las funciones entre X y Y .
3. La ley de composición entre morfismos es la composición usual de funciones.

Ejemplo 1.2. La categoría de los espacios topológicos denotada Top , está constituida por:

1. $Ob(Top)$: Colección de todos los espacios topológicos.
2. Para $X, Y \in Ob(Top)$,
 $Mor(X, Y)$: Colección de todas las funciones continuas entre los espacios topológicos X y Y .
3. La ley de composición entre morfismos es la composición usual entre funciones continuas.

Ejemplo 1.3. La categoría de los grupos denotada Grp , está constituida por:

1. $Ob(Grp)$: Colección de todos los grupos.
2. Para $X, Y \in Ob(Grp)$,
 $Mor(X, Y)$: Colección de todos los homomorfismos entre los grupos X y Y .
3. La ley de composición entre morfismos es la composición usual entre homomorfismos.

Ejemplo 1.4. La categoría de los espacios vectoriales reales denotada $Vect$, está constituida por:

1. $Ob(Vect)$: Colección de todos los espacios vectoriales.
2. Para $X, Y \in Ob(Vect)$,
 $Mor(X, Y)$: Colección de todas las transformaciones lineales entre los espacios vectoriales X y Y .
3. La ley de composición entre morfismos es la composición usual entre transformaciones lineales.

En los ejemplos anteriores los morfismos son funciones y la composición, la usual entre funciones. Veamos a continuación algunos ejemplos donde esto no es así.

Ejemplo 1.5. Sea P un conjunto preordenado, es decir, un conjunto con una relación binaria $\leq$ (reflexiva y transitiva). El conjunto P determina una categoría denotada Pre , constituida por:

1. $Ob(Pre) = P$.
2. Para $x, y \in Ob(Pre)$,
 $Mor(x, y) = \emptyset$ si $x \not\leq y$ y es el conjunto unitario $Mor(x, y) = \{p : x \rightarrow y\}$ si $x \leq y$. En este caso el morfismo $p : x \rightarrow y$ no es una función, sino la proposición $x \leq y$.
3. La ley de composición entre morfismos la determina la transitividad de la relación $\leq$:

$$Mor(x, y) \times Mor(y, z) \longrightarrow Mor(x, z)$$

$$\left(\left(x \xrightarrow{p} y \right), \left(y \xrightarrow{q} z \right) \right) \longmapsto x \xrightarrow{q \circ p} z.$$

Pues si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

Claramente se cumple la asociatividad. La existencia del morfismo identidad $i_x : x \rightarrow x$ está garantizada por la reflexividad de la relación, ya que $x \leq x$ para todo $x \in P$.

Ejemplo 1.6. Sea $(M, \cdot)$ un monoide, es decir, un conjunto $M \neq \emptyset$ dotado de una ley de composición interna $\cdot$, asociativa y con elemento identidad e .

El monoide M determina la siguiente categoría denotada Mon :

$$1. Ob(Mon) = \{e\}.$$

$$2. Mor(e, e) = \left\{ e \xrightarrow{a} e : a \in M \right\} = M.$$

Es decir que cada elemento a de M constituye un morfismo entre e y e .

3. La ley de composición entre morfismos corresponde a la operación $\cdot$ en M :

$$Mor(e, e) \times Mor(e, e) \longrightarrow Mor(e, e)$$

$$\left(\left(e \xrightarrow{a} e \right), \left(e \xrightarrow{b} e \right) \right) \longmapsto \left(e \xrightarrow{a \cdot b} e \right).$$

El axioma de asociatividad entre morfismos corresponde a la asociatividad de la operación $\cdot$, y la existencia del morfismo identidad está asegurada por la existencia del elemento identidad $e : e \rightarrow e$. En esta categoría podemos escribir $Ob(C) = \{x\}$ para cualquier $x \in M$.

1.2. Funtores

Bla Bla Bla Bla Bla Bla Bla Bla Bla Bla Bla Bla
Bla Bla Bla Bla

Definición 1.2. Sean $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ categorías. Un **funtor covariante** $F : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ se define por:

1. Una función, denotada también por $F : Ob(\mathfrak{B}) \rightarrow Ob(\mathfrak{C})$, que asigna a cada objeto B de $\mathfrak{B}$ un objeto $F(B)$ de $\mathfrak{C}$.

2. Para cada par de objetos A, B de $\mathfrak{B}$ se define una función también denotada por:

$$F : Mor_{\mathfrak{B}}(A, B) \rightarrow Mor_{\mathfrak{C}}(F(A), F(B))$$

$$f \mapsto F(f).$$

que cumple las siguientes condiciones:

3. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, para cualquier morfismo f, g de $\mathfrak{B}$ compatibles para la composición.
4. $F(i_B) = i_{F(B)}$, para cada objeto B de $\mathfrak{B}$.

Un **functor contravariante** de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{C}$ se define como antes pero cambiando (2) y (3) de la siguiente manera:

$$F : Mor_{\mathfrak{B}}(A, B) \rightarrow Mor_{\mathfrak{C}}(F(B), F(A))$$

$$f \longmapsto F(f)$$

y ,

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f).$$

1.2.1. Ejemplos De Funtores

Algunos ejemplos triviales de funtores son los siguientes:

Ejemplo 1.7. El **functor identidad** de una categoría $\mathfrak{B}$ en sí misma, notado $i_{\mathfrak{B}}$, se define como sigue:

1. Para cada $X \in Ob(\mathfrak{B})$. $i_{\mathfrak{B}} : Ob(\mathfrak{B}) \rightarrow Ob(\mathfrak{B})$, definido por $i_{\mathfrak{B}}(X) = X$.
2. Para cada $f \in Mor(X, Y)$ con $X, Y \in Ob(\mathfrak{B})$. $i_{\mathfrak{B}} : Mor(X, Y) \rightarrow Mor(X, Y)$ definido por $i_{\mathfrak{B}}(f) = f$.

$i_{\mathfrak{B}}$ cumple las siguientes condiciones:

3. Sean f y g morfismos de la categoría $\mathfrak{B}$, con $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ donde $X, Y, Z \in Ob(\mathfrak{B})$. Entonces:

$$\begin{aligned} i_{\mathfrak{B}}(g \circ f) &= g \circ f \\ &= i_{\mathfrak{B}}(g) \circ i_{\mathfrak{B}}(f). \end{aligned}$$

4. Para $X \in Ob(\mathfrak{B})$, sea $i_X : X \rightarrow X$ el morfismo identidad. Entonces:

$$\begin{aligned} i_{\mathfrak{B}}(i_X) &= i_X \\ &= i_{i_{\mathfrak{B}}(X)}. \end{aligned}$$

Luego $i_{\mathfrak{B}}$ es un funtor de la categoría $\mathfrak{B}$ en sí misma.

Ejemplo 1.8. Sea $O : Grp \longrightarrow Conj$, veamos que O definido como sigue, es un funtor:

1. Para cada $A \in Ob(Grp)$. $O : Ob(Grp) \longrightarrow Ob(Conj)$ definido por $O(A) = A$.
2. Para cada $f \in Mor_{Grp}(A, B)$, con $A, B \in Ob(Grp)$. $O : Mor_{Grp}(A, B) \longrightarrow Mor_{Conj}(A, B)$, definido por $O(f) = f$.

O cumple las siguientes condiciones:

3. Sean f y g morfismos de la categoría Grp , con $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ donde $A, B, C \in Ob(Grp)$. Entonces:

$$\begin{aligned} O(g \circ f) &= g \circ f \\ &= O(g) \circ O(f). \end{aligned}$$

4. Para $A \in Ob(Grp)$, sea $i_A : A \rightarrow A$ el morfismo identidad. Entonces:

$$\begin{aligned} O(i_A) &= i_A \\ &= i_{O(A)}. \end{aligned}$$

Luego tenemos que O es un funtor. Al funtor O se le denomina **funtor olvido**, porque se está “olvidando” de la estructura de grupo.

Ejemplo 1.9. Sea $F : Conj \longrightarrow Conj$, definido por:

1. Para cada $A \in Ob(Conj)$, $F(A) = P(A)$.
2. Para cada $f \in Mor_{Conj}(A, B)$, con $A, B \in Ob(Conj)$, $F(f) = f_!$, donde $f_!(X) = \{f(x) : x \in X\}$ y $X \in P(A)$. Es claro que $f_!(X) \in P(B)$.

F satisface las siguientes propiedades:

3. Sean $f \in Mor_{Conj}(A, B)$ y $g \in Mor_{Conj}(B, C)$, con $A, B, C \in Ob(Conj)$. Entonces, para $X \in P(A)$ obtenemos

$$\begin{aligned} (F(g) \circ F(f))(X) &= (g_! \circ f_!)(X) \\ &= g_!(f_!(X)) \\ &= \{g(y) : y \in f_!(X)\}, \end{aligned}$$

donde $f_!(X) \in P(B)$. Como $y \in f_!(X)$ entonces $y = f(x)$ con $x \in X$, esto es

$$(F(g) \circ F(f))(X) = \{g(f(x)) : x \in X\}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} F(g \circ f)(X) &= (g \circ f)_!(X) \\ &= \{(g \circ f)(x) : x \in X\} \\ &= \{g(f(x)) : x \in X\}, \end{aligned}$$

y así,

$$(F(g) \circ F(f))(X) = F(g \circ f)(X).$$

4. Para $A \in Ob(Conj)$, sea $i_A : A \longrightarrow A$ el morfismo identidad, entonces para $X \in P(A)$,

$$\begin{aligned} F(i_A)(X) &= (i_A)_!(X) \\ &= \{i_A(x) : x \in X\} \\ &= \{x : x \in X\} \\ &= X. \end{aligned}$$

Por otro lado, sea $i_{P(A)} : P(A) \longrightarrow P(A)$ la identidad de $P(A)$, tenemos que,

$$\begin{aligned} i_{F(A)}(X) &= i_{P(A)}(X) \\ &= X, \end{aligned}$$

y así,

$$F(i_A)(X) = i_{F(A)}(X).$$

Por tanto F es un funtor covariante.

Ejemplo 1.10. Sea $F : Conj \longrightarrow Conj$, definido por:

1. Para cada $A \in Ob(Conj)$, $F(A) = P(A)$.
2. Para cada $f \in Mor_{Conj}(A, B)$, con $A, B \in Ob(Conj)$, $F(f) = f^!$, donde $f^!(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$ y $Y \in P(B)$. Es claro que $f^!(Y) \in P(A)$.

F satisface las siguientes propiedades:

3. Sean $f \in Mor_{Conj}(A, B)$ y $g \in Mor_{Conj}(B, C)$ con $A, B, C \in Ob(Conj)$.

Entonces, para $Z \in P(C)$ obtenemos,

$$\begin{aligned} (F(f) \circ F(g))(Z) &= (f^! \circ g^!)(Z) \\ &= f^!(g^!(Z)) \\ &= \{x \in A : f(x) \in g^!(Z)\}, \end{aligned}$$

donde $g^!(Z) \in P(B)$. Como $f(x) \in g^!(Z)$, entonces $g(f(x)) \in Z$, esto es:

$$(F(f) \circ F(g))(Z) = \{x \in A : g(f(x)) \in Z\}.$$

Por otro lado, para $Z \in P(C)$

$$\begin{aligned} F(g \circ f)(Z) &= (g \circ f)^!(Z) \\ &= \{x \in A : (g \circ f)(x) \in Z\} \\ &= \{x \in A : g(f(x)) \in Z\}. \end{aligned}$$

Y así,

$$(F(f) \circ F(g))(Z) = F(g \circ f)(Z).$$

4. Para $A \in Ob(Conj)$, sea $i_A : A \longrightarrow A$ el morfismo identidad, entonces para $X \in P(A)$,

$$\begin{aligned} F(i_A)(X) &= (i_A)^!(X) \\ &= \{x \in A : i_A(x) \in X\} \\ &= \{x \in A : x \in X\} \\ &= X. \end{aligned}$$

Por otro lado, sea $i_{P(A)} : P(A) \longrightarrow P(A)$ la identidad de $P(A)$, tenemos que,

$$\begin{aligned} i_{F(A)}(X) &= i_{P(A)}(X) \\ &= X. \end{aligned}$$

Por tanto F es un funtor contravariante.

Ejemplo 1.11. Sea $(M, \cdot)$ un monoide (ver Ejemplo 1.6) y sea X un conjunto no vacío; M actúa sobre X si existe una función $*$,

$$* : M \times X \longrightarrow X$$

$$(m, x) \longmapsto m * x$$

que satisface las siguientes condiciones:

- i) Para cada $x \in X$, $e * x = x$.
- ii) Para cada $m, n \in M$ y cada $x \in X$, $(m \cdot n) * x = m * (n * x)$.

Sea $F : Mon \longrightarrow Conj$, veamos que F definido como sigue, es un funtor:

- 1. Para $e \in Ob(Mon)$. $F : Ob(Mon) \longrightarrow Ob(Conj)$ definido por $F(e) = X$.
- 2. Para cada $m \in Mor_{Mon}(e, e)$, con $e \in Ob(Mon)$. $F : Mor_{Mon}(e, e) \longrightarrow Mor_{Conj}(X, X)$ definido por $F(m) : m * x, \forall x \in X$.

F cumple las siguientes condiciones:

- 3. Sean $m, n \in Mor_{Mon}(e, e)$ entonces:

$$\begin{aligned} F(m \cdot n)(x) &= (m \cdot n) * x \\ &= m * (n * x) \\ &= m * (F(n)(x)) \\ &= F(m)(F(n)(x)) \\ &= (F(m) \circ F(n))(x). \end{aligned}$$

- 4. Para $e \in Ob(Mon)$, sea $e : e \longrightarrow e$, el morfismo identidad del objeto e en la categoría Mon y sea $i_X : X \longrightarrow X$ la identidad de X en la categoría $Conj$. Entonces:

$$\begin{aligned} F(e)(x) &= e * x \\ &= x \\ &= i_X(x) \\ &= i_{F(e)}(x), \end{aligned}$$

y así,

$$F(e)(x) = i_{F(e)}(x).$$

Luego, tenemos que F es un funtor.

Capítulo 2

Acciones Globales y Parciales de Grupos sobre Conjuntos

En este capítulo se estudian las acciones globales y parciales de grupos sobre conjuntos, algunos aspectos básicos y ejemplos. En particular, se presenta de manera detallada la construcción de la globalización de una acción parcial. En otras palabras, se quiere mostrar en detalle que toda acción parcial proviene de la restricción adecuada de una acción global.

2.1. Acciones Globales

Definición 2.1. Sea X un conjunto no vacío y G un grupo con elemento neutro 1 . Una **acción global** de G sobre X es una función de $G \times X$ en X que satisface:

(i) Para cada $x \in X$, $1 \cdot x = x$.

(ii) Para cada $x \in X$ y cada $g, h \in G$, $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Si un conjunto X satisface las condiciones anteriores, se dice que G actúa sobre X o simplemente que X es un G – *Conjunto*, esto se denota por (G, X) . Análogamente

se podría definir una acción por la derecha.

Definición 2.2. Si G actúa globalmente sobre X y X' , se dice que estas dos acciones son equivalentes si existe una biyección $f : X \longrightarrow X'$ tal que $f(g * x) = g \cdot f(x)$, para todo $g \in G$ y $x \in X$.

Ejemplo 2.1. Sea G un grupo y X un conjunto no vacío cualquiera. La acción de G sobre X dada por $g \cdot x = x$ para todo x en X , es llamada la acción trivial de G en X .

Ejemplo 2.2. Sea G cualquier grupo y consideremos H un subgrupo de G . Entonces H actúa sobre G mediante la multiplicación a izquierda, esto es, la función $H \times G \rightarrow G$ está dada por $h \cdot g = hg$. En particular, si $H = G$ se tiene que el grupo G actúa sobre sí mismo.

En general no es difícil hallar acciones de grupos, pues si X es un conjunto y S_X es el grupo de todas las biyecciones de X , entonces X es un S_X – conjunto. De hecho, el siguiente teorema muestra que toda acción de grupo está asociada con las biyecciones del conjunto sobre el cual está actuando.

Teorema 2.1. Si X es un G – conjunto, entonces para cada $g \in G$ la función $f_g : X \rightarrow X$ definida como $f_g(x) = g \cdot x$ para cada $x \in X$, es biyectiva.

Demostración. Sean $x, x' \in X$ tales que $f_g(x) = f_g(x')$. Entonces $g \cdot x = g \cdot x'$ y así $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot (g \cdot x')$. Obtenemos entonces que $x = 1 \cdot x = (g^{-1}g) \cdot x = (g^{-1}g) \cdot x' = 1 \cdot x' = x'$, por lo cual f_g es uno a uno. Finalmente, para cada $x \in X$ existe $y = g^{-1} \cdot x \in X$ tal que $f_g(y) = g \cdot (g^{-1} \cdot x) = (gg^{-1}) \cdot x = x$. Así f_g es sobre y concluimos que f_g es biyectiva. $\square$

El resultado anterior induce un homomorfismo de grupos, lo cual se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.2. La función $\theta : G \rightarrow S_X$ definida como $\theta(g) = f_g$ para cada $g \in G$, es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Sean $g, h \in G$, $x \in X$. Entonces, $\theta(gh)(x) = f_{gh}(x) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = f_g(f_h(x)) = (f_g \circ f_h)(x) = (\theta(g) \circ \theta(h))(x)$. Luego $\theta(gh) = \theta(g) \circ \theta(h)$ y así θ es un homomorfismo. $\square$

El resultado anterior nos permite afirmar que G actúa sobre X por medio de biyecciones.

2.2. Definición de Acción Parcial

Definición 2.3. Sea X un conjunto no vacío y G un grupo con elemento neutro 1. Una acción parcial α de G sobre X es una colección de subconjuntos $S_g \subseteq X$ con $g \in G$ y biyecciones $\alpha_g : S_{g^{-1}} \longrightarrow S_g$ tales que para todo $g, h \in G$ se cumple:

(i) $S_1 = X$ y α_1 es la función identidad de X .

(ii) $\alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}}) \subseteq S_{(gh)^{-1}}$.

(iii) $(\alpha_g \circ \alpha_h)(x) = \alpha_{gh}(x)$ para todo $x \in \alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}})$.

Si α es una acción parcial de G sobre X , entonces la notaremos como $\alpha = \{S_g, \alpha_g\}_{g \in G}$. Note que (iii) implica que $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$. En efecto, si $g \in G$ entonces para cualquier $x \in \alpha_{g^{-1}}^{-1}(S_{g^{-1}} \cap S_{g^{-1}}) = \alpha_{g^{-1}}^{-1}(S_{g^{-1}}) = S_g$ se tiene que $(\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}})(x) = \alpha_{gg^{-1}}(x) = \alpha_1(x) = x$. De igual manera se tiene $(\alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_g)(x) = x$ para todo $x \in S_{g^{-1}}$. De donde $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$.

Además, (ii) y (iii) implican que $\alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}}) = S_{h^{-1}} \cap S_{(gh)^{-1}}$. En efecto, para todo $g, h \in G$ se tiene que $\alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}}) \subseteq S_{h^{-1}} \cap S_{(gh)^{-1}}$ y reemplazando h por h^{-1} y g por gh se tiene $\alpha_{h^{-1}}^{-1}(S_{h^{-1}} \cap S_{(gh)^{-1}}) \subseteq S_h \cap S_{g^{-1}}$. Por consiguiente $S_{h^{-1}} \cap S_{(gh)^{-1}} \subseteq \alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}})$ y así se obtiene la igualdad deseada.

Ejemplo 2.3. Sea G un grupo que actúa globalmente sobre un conjunto X y sea Y un subconjunto de X no vacío. Tomando $S_g = Y \cap f_g(Y)$ donde $f_g(Y) = g \cdot Y$ para

todo $g \in G$ y definiendo $\alpha_g : S_{g^{-1}} \rightarrow S_g$, como la restricción de f_g en $S_{g^{-1}}$, se tiene que α es una acción parcial de G sobre Y . Primero note que si $x \in S_{g^{-1}} = Y \cap f_{g^{-1}}(Y)$ entonces $\alpha_g(x) = f_g(x) \in f_g(Y)$ y como $x = f_{g^{-1}}(x')$ para $x' \in Y$ se tiene que $\alpha_g(x) = f_g(f_{g^{-1}}(x')) = x'$. Así $\alpha_g(x) \in Y$ y $\alpha_g(x) \in f_g(Y) \cap Y = S_g$. Ahora,

$$(i) \ S_1 = Y \cap f_1(Y) = Y \cap (1 \cdot Y) = Y.$$

Ahora, $\alpha_1 : S_1 \rightarrow S_1$ está definida como $\alpha_1(y) = f_1(y) = 1 \cdot y = y$ para todo $y \in Y$. Luego α_1 es la función identidad de Y .

$$(ii) \text{ Veamos que para todo } g, h \in G \text{ se tiene que } \alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}}) \subseteq S_{(gh)^{-1}}.$$

En efecto, si $y \in \alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}})$ entonces

$$\begin{aligned} y &= \alpha_{h^{-1}}(y'), \text{ para algún } y' \in (S_h \cap S_{g^{-1}}) \\ &= f_{h^{-1}}(y'), \text{ donde } y' = f_{g^{-1}}(y'') \text{ para algún } y'' \in Y \\ &= f_{h^{-1}}(f_{g^{-1}}(y'')) \\ &= f_{h^{-1}g^{-1}}(y'') \\ &= f_{(gh)^{-1}}(y''). \end{aligned}$$

De donde $y \in Y \cap f_{(gh)^{-1}}(Y) = S_{(gh)^{-1}}$, que era lo que se quería probar.

$$(iii) \text{ Para todo } y \in \alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}}) \text{ se tiene que } (\alpha_g \circ \alpha_h)(y) = \alpha_g(\alpha_h(y)) = f_g(f_h(y)) = f_{gh}(y) \text{ y como por (ii) } y \in S_{(gh)^{-1}} \text{ se tiene que } f_{gh}(y) = \alpha_{gh}(y).$$

Las acciones parciales obtenidas como en el Ejemplo 2.3 se dicen **restricciones de la acción global**. De hecho puede probarse que toda acción parcial es la restricción de una acción global ([2], Teorema 1.1). Note además que si en el ejemplo anterior Y es no G -invariante (es decir, existe $g \in G$ tal que $g \cdot Y \neq Y$), entonces α es una acción parcial que no es global.

Notemos que si G es un grupo que actúa globalmente sobre un conjunto X , y además tenemos una colección $\alpha = \{S_g, \alpha_g\}$ tal que, para todo $g \in G$ se tiene que, $S_g = X$ y

$\alpha_g = \{f_g : X \longrightarrow X : f_g(x) = g * x, \forall x \in X\}$, entonces α es una acción parcial de G sobre X . En efecto,

$$(i) \ S_1 = X \text{ y } \alpha_1 = f_1 = id_X.$$

$$(ii) \text{ Sabemos que para todo } g, h \in G, S_h = X \text{ y } S_{g^{-1}} = X, \text{ luego } S_h \cap S_{g^{-1}} = X.$$

Del mismo modo, se tiene que $S_{(gh)^{-1}} = X$, así

$$\alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}}) = f_h^{-1}(X) \subseteq X = S_{(gh)^{-1}}.$$

$$(iii) \text{ Sean } g, h \in G \text{ y } x \in X, \text{ entonces,}$$

$$\begin{aligned} (\alpha_g \circ \alpha_h)(x) &= (f_g \circ f_h)(x) \\ &= f_g(f_h(x)) \\ &= f_g(h * x) \\ &= g * (h * x) \\ &= (gh) * x \\ &= f_{gh}(x) \\ &= \alpha_{gh}(x) \end{aligned} \quad \text{para todo } x \in X.$$

Así α resulta ser una acción parcial de G sobre X .

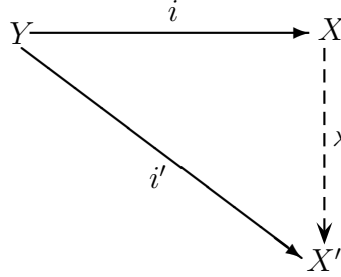
Con lo anterior se ha probado que **toda acción global es una acción parcial**.

Definición 2.4. Dos acciones parciales α, α' que actúan sobre X y X' respectivamente se dicen equivalentes si existe una biyección $f : X \longrightarrow X'$ tal que para todo $x \in X$, si $x \in S_{g^{-1}}$ entonces $f(x) \in S'_{g^{-1}}$ y $\alpha'_g(f(x)) = f(\alpha_g(x))$.

Definición 2.5. Una globalización de una acción parcial α de G sobre Y , es una acción (G, X) junto con una inyección $i : Y \longrightarrow X$ tal que la acción parcial α y la acción parcial inducida (la restricción de la acción global) de G en $i(Y)$ son equivalentes.

Definición 2.6. Una globalización $\{(G, X), i\}$ de una acción parcial α de G sobre Y se dice que es minimal si para toda globalización $\{(G, X'), i'\}$ de α , existe una inyección $\lambda : X \longrightarrow X'$ tal que $\lambda(g * x) = g \bullet \lambda(x)$ para todo $g \in G$ y $x \in X$.

La existencia de λ nos garantiza que el siguiente diagrama conmuta:



J. Kellendonk y M.V. Lawson en [14] probaron que toda acción parcial tiene una única globalización minimal. Para probar eso primero definieron la siguiente relación: Sea α una acción parcial de G sobre Y , se define la relación $\sim$ en el conjunto $G \times Y$ por

$$(g, x) \sim (h, y), \text{ si y sólo si, } x \in S_{(h^{-1}g)^{-1}} \text{ y } \alpha_{h^{-1}g}(x) = y.$$

Proposición 2.1. La relación $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $G \times Y$.

Demostración. La relación $\sim$ sobre $G \times Y$ es de equivalencia si satisface las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

(i) Sea $x \in S_1 = Y$, $\alpha_1(x) = x$ entonces $x \in S_{(g^{-1}g)^{-1}}$ y $\alpha_{g^{-1}g}(x) = x$, es decir, $(g, x) \sim (g, x)$.

(ii) Si $(g, x) \sim (h, y)$, entonces $x \in S_{(h^{-1}g)^{-1}}$ y $\alpha_{(h^{-1}g)}(x) = y$

Como $\alpha_{(h^{-1}g)} : S_{(h^{-1}g)^{-1}} \longrightarrow S_{h^{-1}g}$, se tiene que $y \in S_{h^{-1}g} = S_{(g^{-1}h)^{-1}}$ y así $y \in S_{(g^{-1}h)^{-1}}$.

Además se sabe que $\alpha_{g^{-1}h} : S_{(g^{-1}h)^{-1}} \longrightarrow S_{g^{-1}h}$ de ahí,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{g^{-1}h}(y) &= \alpha_{g^{-1}h}(\alpha_{h^{-1}g}(x)) \\
 &= (\alpha_{g^{-1}h} \circ \alpha_{(g^{-1}h)^{-1}})(x).
 \end{aligned}$$

Es claro que $\alpha_{g^{-1}h}$ es la inversa de $\alpha_{(g^{-1}h)^{-1}}$. Como son biyecciones se tiene que,

$$\begin{aligned} &= (\alpha_{g^{-1}h} \circ \alpha_{(g^{-1}h)^{-1}})(x) \\ &= \alpha_1(x) \\ &= x. \end{aligned}$$

Así $\alpha_{g^{-1}h}(y) = x$ y $y \in S_{(g^{-1}h)^{-1}}$, es decir, $(h, y) \sim (g, x)$.

(iii) Si $(g, x) \sim (h, y)$ y $(h, y) \sim (f, z)$ entonces,

$$\begin{aligned} x &\in S_{(h^{-1}g)^{-1}} \text{ y } \alpha_{h^{-1}g}(x) = y \\ y &\in S_{(f^{-1}h)^{-1}} \text{ y } \alpha_{f^{-1}h}(y) = z. \end{aligned}$$

De ahí,

$$\alpha_{h^{-1}g}(x) \in S_{(f^{-1}h)^{-1}}.$$

Dado que $\alpha_{h^{-1}g}$ son biyecciones y que $\alpha_{h^{-1}g}(x) \in S_{(f^{-1}h)^{-1}}$ entonces,

$$x \in \alpha_{(h^{-1}g)^{-1}}(S_{(f^{-1}h)^{-1}}).$$

Y por hipótesis $x \in \alpha_{(h^{-1}g)^{-1}}(S_{h^{-1}g})$ es decir,

$$x \in \alpha_{(h^{-1}g)^{-1}}(S_{h^{-1}g} \cap S_{(f^{-1}h)^{-1}}).$$

Dado que α es una acción parcial entonces,

$$\begin{aligned} (\alpha_{f^{-1}h} \circ \alpha_{h^{-1}g})(x) &= (\alpha_{(f^{-1}h)(h^{-1}g)})(x) \\ &= (\alpha_{(f^{-1}g)})(x). \end{aligned}$$

También por hipótesis tenemos que $\alpha_{h^{-1}g}(x) = y$ y $\alpha_{f^{-1}h}(y) = z$ de ahí,

$$\begin{aligned}\alpha_{f^{-1}h}(\alpha_{h^{-1}g}(x)) &= \alpha_{f^{-1}h}(y) \\ \alpha_{f^{-1}g}(x) &= \alpha_{f^{-1}h}(y) \\ \alpha_{f^{-1}g}(x) &= z.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Además $\alpha_{h^{-1}g}(x) = y$ y $y \in S_{(f^{-1}h)^{-1}}$ o sea $\alpha_{h^{-1}g}(x) \in S_{(f^{-1}h)^{-1}}$. Como $\alpha_{h^{-1}g}$ son biyecciones entonces $x \in \alpha_{h^{-1}g}^{-1}(S_{(f^{-1}h)^{-1}})$ es decir,

$$x \in \alpha_{(h^{-1}g)^{-1}}(S_{(f^{-1}h)^{-1}}).$$

Entonces $x \in \alpha_{(h^{-1}g)^{-1}}(S_{h^{-1}g})$ y $x \in \alpha_{(h^{-1}g)^{-1}}(S_{(f^{-1}h)^{-1}})$, es decir

$$x \in \alpha_{(h^{-1}g)^{-1}}(S_{h^{-1}g} \cap S_{(f^{-1}h)^{-1}}).$$

Como $\alpha_{(h^{-1}g)^{-1}}(S_{h^{-1}g} \cap S_{(f^{-1}h)^{-1}}) \subseteq S_{((f^{-1}h)(h^{-1}g))^{-1}}$ entonces

$$x \in S_{((f^{-1}h)(h^{-1}g))^{-1}}$$

esto es,

$$x \in S_{(f^{-1}g)^{-1}}.\tag{2.2}$$

Así de (2.1) y (2.2),

$$x \in S_{(f^{-1}g)^{-1}} \text{ y } \alpha_{f^{-1}g}(x) = z$$

Es decir $(g, x) \sim (f, z)$.

Luego $\sim$ es una relación de equivalencia. □

Ahora, si denotamos el conjunto $G \times Y / \sim = Y_G$ y para $g \in G$, $x \in X$ la clase de equivalencia que contiene los elementos (g, x) por $[g, x]$ entonces la función

$$\begin{aligned}*: G \times Y_G &\longrightarrow Y_G \\ (h, [g, x]) &\longrightarrow h * [g, x] = [hg, x]\end{aligned}$$

es una acción global de G en Y_G . En efecto,

1. Sea $1 \in G$ el neutro y $[g, x] \in Y_G$, entonces $1 * [g, x] = [1g, x] = [g, x]$.
2. Sea $h, t \in G$ y $[g, x] \in Y_G$, entonces

$$\begin{aligned}
 (ht) * [g, x] &= [(ht)g, x] \\
 &= [h(tg), x] \\
 &= h * [tg, x] \\
 &= h * (t * [g, x]).
 \end{aligned}$$

Luego, $*$ es una acción global de G sobre Y_G .

Veamos que la función $i : Y \longrightarrow Y_G$ definida por $i(x) = [1, x]$ para todo x en Y es una inyección. Sean $x, y \in Y$ tales que $i(x) = i(y)$. Entonces $[1, x] = [1, y]$, es decir, $(1, x) \sim (1, y)$ y significa que $x \in S_1$ y $\alpha_1(x) = y$. Como $\alpha_1(x) = x$ se tiene que $x = y$ y por tanto i es inyectiva.

Proposición 2.2. Sea α una acción parcial de G sobre Y y sea $g, h \in G$, $x \in Y$. Entonces

1. Si $x \in S_{h^{-1}}$, entonces $[g, \alpha_h(x)] = [gh, x]$.
2. $\{(G, Y_G), i\}$ es una globalización de α .

Demostración. 1. Si $x \in S_{h^{-1}}$ entonces $\alpha_h(x)$ está definida y además

$$\alpha_h(x) \in S_h = S_{(gh)^{-1}g^{-1}} \quad (2.3)$$

Por otro lado sabemos que,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{h^{-1}}(\alpha_h(x)) &= (\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_h)(x) \\
 &= \alpha_1(x) \\
 &= x.
 \end{aligned}$$

Además,

$$\alpha_1(\alpha_h(x)) = \alpha_h(x)$$

aplicando $\alpha_{h^{-1}}$ a ambos lados de esta última igualdad tenemos,

$$\begin{aligned}\alpha_{h^{-1}}(\alpha_1(\alpha_h(x))) &= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_h(x)) \\ (\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_1)(\alpha_h(x)) &= x.\end{aligned}$$

Como $\alpha_h(x) \in S_h$ entonces $\alpha_h(x) \in \alpha_1^{-1}(S_1 \cap S_{(h^{-1})^{-1}})$ de donde,

$$\begin{aligned}(\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_1)(\alpha_h(x)) &= (\alpha_{(h^{-1})(1)})(\alpha_h(x)) \\ &= \alpha_{h^{-1}(g^{-1}g)}(\alpha_h(x)) \\ &= \alpha_{(gh)^{-1}g}(\alpha_h(x))\end{aligned}$$

Como $(\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_1)(\alpha_h(x)) = x$ entonces

$$\alpha_{(gh)^{-1}g}(\alpha_h(x)) = x. \quad (2.4)$$

Así de (2.3) y (2.4)

$$\alpha_h(x) \in S_{((gh)^{-1}g)^{-1}} \quad y \quad \alpha_{(gh)^{-1}g}(\alpha_h(x)) = x.$$

Por lo que $(g, \alpha_h(x)) \sim (gh, x)$, es decir

$$[g, \alpha_h(x)] = [gh, x].$$

2. Probemos que $\{(G, Y_G), i\}$ es una globalización de α . Para ello basta probar que la acción parcial α de G en Y es equivalente a la acción parcial inducida en Y_G sobre $i(Y)$.

Es claro que $i : Y \longrightarrow i(Y)$ es una biyección. Si $x \in S_{g^{-1}}$ entonces $\alpha_g(x)$ está definida, supongamos que $\alpha_g(x) = y \in S_g \subseteq Y$, entonces $i(y) = [1, y]$. Por

otro lado,

$$\begin{aligned}
 g * i(x) &= g * [1, x] \\
 &= [g1, x] \\
 &= [g, x] \\
 &= [1g, x].
 \end{aligned}$$

Por la parte 1. de la proposición

$$\begin{aligned}
 [1g, x] &= [1, \alpha_g(x)] \\
 &= [1, y] \\
 &= i(y) \\
 &= i(\alpha_g(x)).
 \end{aligned}$$

Así se tiene que

$$g * i(x) = i(\alpha_g(x)).$$

Luego la acción parcial α de G en Y y la acción parcial inducida de G en $i(Y)$ son equivalentes. Por tanto $\{(G, Y_G), i\}$ es una globalización de α . $\square$

Teorema 2.3. Sea α una acción parcial de G en Y . Entonces $\{(G, Y_G), i\}$ es la única globalización minimal de α .

Demostración. La proposición anterior muestra que $\{(G, Y_G), i\}$ es una globalización de α . Veamos que $\{(G, Y_G), i\}$ es minimal.

Sea $\{(G, X), j\}$ una globalización de α , definimos

$$\lambda : Y_G \longrightarrow X$$

como $\lambda([g, x]) = g \cdot j(x)$, para todo $[g, x]$ en Y_G .

Veamos que λ está bien definida.

Si $[g, x] = [h, y]$ es decir $(g, x) \sim (h, y)$, entonces $x \in S_{(h^{-1}g)^{-1}}$ y $\alpha_{h^{-1}g}(x) = y$.

Aplicando j a ambos lados de $\alpha_{h^{-1}g}(x) = y$ tenemos

$$j(\alpha_{h^{-1}g}(x)) = j(y).$$

Como $\{(G, X), j\}$ es una globalización de α entonces $j(\alpha_{h^{-1}g}(x)) = \alpha'_{h^{-1}g}(j(x))$, donde α' es la acción inducida por la acción global sobre X , luego

$$\alpha'_{h^{-1}g}(j(x)) = j(y).$$

Como α' es la acción parcial inducida se tiene que $\alpha'_{h^{-1}g}(j(x)) = f'_{h^{-1}g}(j(x))$ con f' como la acción global sobre X . Así

$$\begin{aligned} f'_{h^{-1}g}(j(x)) &= j(y) \\ (f'_{h^{-1}} \circ f'_g)(j(x)) &= j(y) \\ f'_g(j(x)) &= f'_h(j(y)) \\ g \cdot j(x) &= h \cdot j(y) \\ \lambda([g, x]) &= \lambda([h, y]). \end{aligned}$$

Luego λ está bien definida.

Ahora probemos que λ es inyectiva.

Sean $[g, x], [h, y] \in Y_G$ tales que $\lambda([g, x]) = \lambda([h, y])$. Entonces

$$\begin{aligned} g \cdot j(x) &= h \cdot j(y) \\ (h^{-1}g) \cdot j(x) &= j(y) \\ j(\alpha_{h^{-1}g}(x)) &= j(y). \end{aligned}$$

Esto se tiene por que $\{(G, X), j\}$ es una globalización de α . Además se sabe que j es inyectiva, luego

$$\alpha_{h^{-1}g}(x) = y.$$

Podemos afirmar que $\alpha_{h^{-1}g}(x)$ está definida, entonces $x \in S_{(h^{-1}g)^{-1}}$ y $\alpha_{h^{-1}g}(x) = y$, es decir

$$(g, x) \sim (h, y).$$

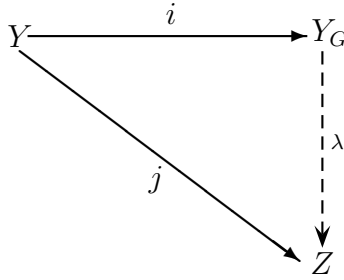
Entonces $[g, x] = [h, y]$, por tanto λ es inyectiva. Luego $\{(G, Y_G), i\}$ es una globalización minimal de α .

Veamos que $\{(G, Y_G), i\}$ es única. Sea $\{(G, Z), j\}$ una globalización minimal de α , entonces tenemos inyecciones $\lambda : Y_G \rightarrow Z$, $\beta : Z \rightarrow Y_G$, tales que $\lambda(g * x) = g \cdot \lambda(x)$ y $\beta(h \cdot z) = h * \beta(z)$, para todo $x \in Y_G$, $z \in Z$ y $g, h \in G$.

Sea $y \in Y$ y $g \in G$, notemos que,

$$\begin{aligned} (\beta \circ \lambda)([g, y]) &= \beta(\lambda([g, y])) \\ &= \beta(\lambda(g * [1, y])) \\ &= \beta(g \cdot \lambda([1, y])) \\ &= g * \beta(\lambda(i(y))) \end{aligned}$$

como el siguiente diagrama conmuta,



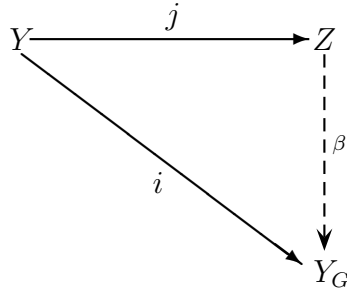
se tiene que,

$$\begin{aligned} j(y) &= (\lambda \circ i)(y) \\ &= \lambda(i(y)) \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} (\beta \circ \lambda)([g, y]) &= g * \beta(\lambda(i(y))) \\ &= g * \beta(j(y)). \end{aligned}$$

Además este diagrama también conmuta,



Entonces,

$$\begin{aligned}
 i(y) &= (\beta \circ j)(y) \\
 &= \beta(j(y)).
 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 (\beta \circ \lambda)([g, y]) &= g * \beta(j(y)) \\
 &= g * i(y) \\
 &= g * [1, y] \\
 &= [g, y].
 \end{aligned}$$

Por tanto se obtiene que $\beta \circ \lambda = 1_{Y_G}$. Como β y λ son inyectivas tenemos que las dos acciones son equivalentes, entonces existe una única globalización.

Luego $\{(G, Y_G), i\}$ es la única globalización minimal de α . □

Ejemplo 2.4. Sea el grupo multiplicativo $G = \{1, -1\}$ y $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si definimos

$$* : G \times X \longrightarrow X$$

$$(g, (x_1, x_2)) \mapsto (x_1, gx_2)$$

Tenemos que $*$ es una acción global. En efecto,

$$i) \quad 1 * (x_1, x_2) = (x_1, 1x_2) = (x_1, x_2)$$

ii) Para todo g_1, g_2 en G , y todo (x_1, x_2) en X se tiene que

$$g_1 * (g_2 * (x_1, x_2)) = (g_1 g_2) * (x_1, x_2)$$

Esto es,

- $1 * (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Deja fijos a todos los elementos de X .
- $-1 * (x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Realiza una reflexión sobre el eje de la ordenada.

Sea $Y = \{(x_1, x_2) \in X : x_2 > 0\}$. Veamos la acción parcial inducida en Y .

La colección $\alpha = \{S_g, \alpha_g\}$ está dada por:

- i) $S_g = Y \cap f_g(Y)$ donde $f_g : X \rightarrow X$ está dada por $f_g((x_1, x_2)) = g * (x_1, x_2)$ para todo $(x_1, x_2) \in X$ y todo $g \in G$.

Entonces

$$S_1 = Y \cap f_1(Y) = Y \cap Y = Y$$

$$S_{-1} = Y \cap f_{-1}(Y) = Y \cap \emptyset = \emptyset.$$

Esto es,

$$S_1 = Y \quad S_{-1} = \emptyset.$$

- ii) $\alpha_g : S_{g^{-1}} \rightarrow S_g$ es la restricción de f_g en $S_{g^{-1}}$, es decir $\alpha_g = f_g|_{S_{g^{-1}}}$.

Entonces

$$\alpha_1 : S_{1^{-1}} \rightarrow S_1 \text{ esto es } \alpha_1 : Y \rightarrow Y$$

$$\alpha_{-1} : S_{(-1)^{-1}} \rightarrow S_{-1} \text{ esto es } \alpha_{-1} : \emptyset \rightarrow \emptyset.$$

Es decir,

$$\alpha_1 = id_Y \quad \alpha_{-1} = f_\emptyset \text{ (función vacía).}$$

Es claro que α así definido es una acción parcial de G en Y , encontremos su globalización minimal.

Para ello, seguimos en parte la construcción de KELLENDOW Y LAWSON.

CONSTRUCCIÓN DE LA GLOBALIZACIÓN MINIMAL DE Y

$$1) \ G \times Y = \{(g, (y_1, y_2)) : g \in G, (y_1, y_2) \in Y\}$$

2) Se define la relación $\sim$ en $G \times Y$ como sigue

$$(g_1, (x_1, x_2)) \sim (g_2, (y_1, y_2)) \leftrightarrow (x_1, x_2) \in S_{((g_2)^{-1}g_1)^{-1}} \quad y \\ \alpha_{((g_2)^{-1}g_1)}((x_1, x_2)) = (y_1, y_2)$$

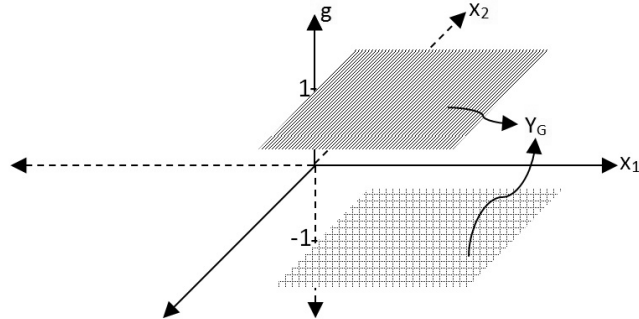
$$\begin{aligned} [1, (x_1, x_2)] &= \{(h, (y_1, y_2)) \in G \times Y : (h, (y_1, y_2)) \sim (1, (x_1, x_2))\} \\ &= \{(h, (y_1, y_2)) \in G \times Y : (y_1, y_2) \in S_{(1^{-1}h)^{-1}} \quad y \\ &\quad \alpha_{(1^{-1}h)}((y_1, y_2)) = (x_1, x_2)\} \\ &= \{(h, (y_1, y_2)) \in G \times Y : (y_1, y_2) \in S_{h^{-1}} \quad y \quad \alpha_h((y_1, y_2)) = (x_1, x_2)\} \\ &= (1, (x_1, x_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [-1, (x_1, x_2)] &= \{(h, (y_1, y_2)) \in G \times Y : (h, (y_1, y_2)) \sim (-1, (x_1, x_2))\} \\ &= \{(h, (y_1, y_2)) \in G \times Y : (y_1, y_2) \in S_{((-1)^{-1}h)^{-1}} \quad y \\ &\quad \alpha_{((-1)^{-1}h)}((y_1, y_2)) = (x_1, x_2)\} \\ &= \{(h, (y_1, y_2)) \in G \times Y : (y_1, y_2) \in S_{(-h)^{-1}} \quad y \quad \alpha_{(-h)}((y_1, y_2)) = (x_1, x_2)\} \\ &= (-1, (x_1, x_2)) \end{aligned}$$

Esta relación así definida resulta ser de equivalencia. Luego el conjunto Y_G nos queda:

$$\begin{aligned} Y_G &= (G \times Y) / \sim \\ &= \{[1, (x_1, x_2)] : (x_1, x_2) \in Y\} \cup \{[-1, (x_1, x_2)] : (x_1, x_2) \in Y\} \end{aligned}$$

Graficamente esto sería



3) Ahora definiendo $\circ : G \times Y_G \longrightarrow Y_G$ por

$$\begin{aligned}\circ(g, [h, (x_1, x_2)]) &= g \circ [h, (x_1, x_2)] \\ &= [gh, (x_1, x_2)]\end{aligned}$$

Resulta estar bien definida.

Verifiquemos que $\circ$ es una acción global de G en Y_G

i) Sea $[h, (x_1, x_2)] \in Y_G$ entonces

$$\begin{aligned}1 \circ [h, (x_1, x_2)] &= [1h, (x_1, x_2)] \\ &= [h, (x_1, x_2)]\end{aligned}$$

ii) Sean $g_1, g_2 \in G, [h, (x_1, x_2)] \in Y_G$ entonces

$$\begin{aligned}g_1 \circ [g_2 \circ [h, (x_1, x_2)]] &= g_1 \circ [g_2h, (x_1, x_2)] \\ &= [g_1(g_2h), (x_1, x_2)] \\ &= [(g_1g_2)h, (x_1, x_2)] \\ &= g_1g_2 \circ [h, (x_1, x_2)]\end{aligned}$$

Es decir, $\circ$ es una acción global de G en Y_G .

La acción $\circ$ lo que está haciendo es:

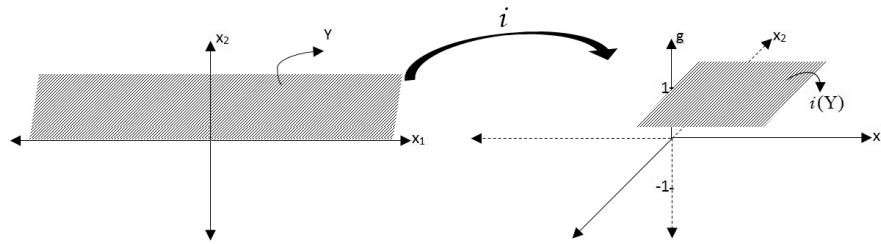
i) $1 \circ [g, (x_1, x_2)] = [g, (x_1, x_2)]$. Deja fijo cada plano que pasa por $(1, x_1, x_2)$ y el otro que pasa por $(-1, x_1, x_2)$ y son paralelos al plano horizontal (y entre sí).

ii) $-1 \circ [g, (x_1, x_2)] = [-g, (x_1, x_2)]$. Refleja los planos que pasan por $(1, x_1, x_2)$ y el otro que pasa por $(-1, x_1, x_2)$ y es paralelo al plano horizontal (y entre sí).

4) Definimos la función inyectiva i de Y en Y_G de la siguiente forma

$$i : Y \longrightarrow Y_G$$

$$(y_1, y_2) \longmapsto [1, (y_1, y_2)]$$



5) Ahora, como Y_G es un G -conjunto e $i(Y) \subseteq Y_G$ entonces veamos la acción parcial inducida de G en $i(Y)$

$\alpha' = \{S'_g, \alpha'_g\}$ se define por

i) $S'_g = i(Y) \cap \beta_g(i(Y))$ donde $\beta_g : Y_G \longrightarrow Y_G$ se define $\beta_g(h, (y_1, y_2)) = g \circ [h, (y_1, y_2)]$

Es decir,

$$S'_1 = i(Y) \quad S'_{-1} = \emptyset$$

ii) $\alpha'_g : S'_{g^{-1}} \longrightarrow S'_g$ es la restricción de β_g en $i(Y)$.

Es decir,

$$\alpha'_1 = id_{i(Y)} \quad \alpha'_{-1} = \beta_\emptyset \text{ (función vacía)}$$

De aquí, las acciones parciales α y α' sobre Y e $i(Y)$ son equivalentes. $((G, Y_G), i)$ es la globalización minimal de α

Capítulo 3

Categoría de Acciones Globales y Parciales

En este capítulo se estudian las categorías de acciones globales y acciones parciales, de modo que se pueda integrar la teoría de categorías con la teoría de acciones. Luego, por medio de la teoría de funtores, se prueba que la globalización puede verse como un funtor entre estas categorías.

3.1. Categoría de Acciones Globales

Definición 3.1. Sean los G – conjuntos $(X, \cdot)$ y $(Y, *)$. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice G – morfismo de X en Y si para todo $x \in X$ y todo $g \in G$ se tiene:

$$f(g \cdot x) = g * f(x)$$

Proposición 3.1. Sean los G – conjuntos $(X, \cdot)$, $(Y, *)$ y $(Z, \bullet)$. Si $f_1 : X \longrightarrow Y$ y $f_2 : Y \longrightarrow Z$ son G – morfismos, entonces $f_2 \circ f_1$ es G – morfismo.

Demostración. Sean $x \in X$ y $g \in G$ entonces

$$\begin{aligned}
 (f_2 \circ f_1)(g \cdot x) &= f_2(f_1(g \cdot x)) \\
 &= f_2(g * f_1(x)) \\
 &= g \bullet f_2(f_1(x)) \\
 &= g \bullet (f_2 \circ f_1)(x).
 \end{aligned}$$

Luego $f_2 \circ f_1$ es un G – *morfismo*. □

Veamos que si X es un G – *conjunto* con $i_X : X \longrightarrow X$ la identidad de X , entonces i_X es un G – *morfismo*. Sean $x \in X$ y $g \in G$ entonces

$$\begin{aligned}
 i_X(g \cdot x) &= g \cdot x \\
 &= g \cdot i_X(x).
 \end{aligned}$$

Así, i_X es un G – *morfismo*.

Ahora definamos la categoría de acciones globales denotada G – **Act** de la siguiente forma:

1. $Ob(G - \mathbf{Act})$: Todos los G – *conjuntos*.
2. Para cada par X, Y en $Ob(G - \mathbf{Act})$, el conjunto $Mor(X, Y)$ son los G – *morfismos* de X en Y .
3. La ley de composición interna es la composición usual entre funciones (G – *morfismos*). Además se probó que si f_1 y f_2 son G – *morfismos* entonces $f_2 \circ f_1$ es un G – *morfismo*. La asociatividad de G – *morfismos* se cumple por ser funciones. El G – *morfismo* identidad es la identidad de X .

De esta forma se define la categoría de las acciones globales.

3.2. Categoría de Acciones Parciales

Definición 3.2. Sean X y Y dos α – conjuntos y $\alpha = \{S_g, \alpha_g\}$, $\alpha' = \{S'_g, \alpha'_g\}$ sus respectivas acciones. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice α – morfismo de X en Y si $x \in S_{g^{-1}}$ implica que $f(x) \in S'_{g^{-1}}$ y $f(\alpha_g(x)) = \alpha'_g(f(x))$.

Proposición 3.2. Sean $f_1 : X \longrightarrow Y$, $f_2 : Y \longrightarrow Z$ dos α – morfismos entonces $f_2 \circ f_1$ es α – morfismo.

Demostración. Sean los α – conjuntos X , Y y Z con $\alpha = \{S_g, \alpha_g\}$, $\alpha' = \{S'_g, \alpha'_g\}$ y $\alpha'' = \{S''_g, \alpha''_g\}$ sus respectivas acciones (parciales). Si $x \in S_{g^{-1}}$ como f_1 es α – morfismo implica que $f_1(x) \in S'_{g^{-1}}$ y así se tiene que $f_2(f_1(x)) \in S''_{g^{-1}}$ por f_2 ser α – morfismo. Es decir, $(f_2 \circ f_1)(x) \in S''_{g^{-1}}$.

Además,

$$\begin{aligned} (f_2 f_1)(\alpha_g(x)) &= f_2(f_1(\alpha_g(x))) \\ &= f_2(\alpha'_g(f_1(x))) \\ &= \alpha''_g(f_2(f_1(x))) \\ &= \alpha''_g((f_2 \circ f_1)(x)). \end{aligned}$$

Luego $f_2 \circ f_1$ es un α – morfismo. □

Veamos que si X es un α – conjunto con $i_X : X \longrightarrow X$ la identidad de X entonces i_X es un α – morfismo. En efecto, si $x \in S_{g^{-1}}$ entonces $i_X(x) \in S_{g^{-1}}$. De ahí

$$\begin{aligned} i_X(\alpha_g(x)) &= \alpha_g(x) \\ &= \alpha_g(i_X(x)). \end{aligned}$$

Lo cual implica que i_X es un α – morfismo.

Demostrado lo anterior, definimos la categoría de las acciones parciales denotada $G - \mathbf{pAct}$ de la siguiente forma:

1. $Ob(G - \mathbf{pAct})$: Todos los α – conjuntos.
2. Para cada par X, Y α – conjunto en $Ob(G - \mathbf{pAct})$, el conjunto $Mor(X, Y)$ son los α – morfismos de X en Y .
3. La ley de composición interna es la composición usual entre funciones (α – morfismos). Además se probó que si f_1 y f_2 son α – morfismos entonces $f_2 \circ f_1$ es un α – morfismo. La asociatividad de α – morfismos se cumple por ser funciones. El α – morfismo identidad es la identidad de X .

De esta forma se define la categoría de las acciones parciales.

3.3. Relaciones Funtoriales

Primeramente definamos $F : (G - \mathbf{Act}) \longrightarrow (G - \mathbf{pAct})$ y veamos que definido de la siguiente forma F es un funtor.

1. Sea $X \in Ob(G - \mathbf{Act})$, definimos $F(X) = X \in Ob(G - \mathbf{pAct})$. Esto es posible porque toda acción global es parcial.
2. Sea $f \in Mor_{G-\mathbf{Act}}(X, Y)$ definimos $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ por $F(f) = f$. Veamos que en efecto f es un α – morfismo.

Si $x \in X$, entonces $f(x) \in Y$.

Recordemos además que las acciones parciales sobre X y Y están dadas respectivamente por $\alpha = \{S_g, \alpha_g\}$, $\alpha' = \{S'_g, \alpha'_g\}$ donde $S_g = X$, $S'_g = Y$ para todo $g \in G$ y

$$\alpha_g = \{f_g : f_g(x) = g * x, \forall x \in X\} \quad , \quad \alpha'_g = \{f'_g : f'_g(x) = g \cdot x, \forall y \in Y\}.$$

Donde $*$ es la acción global sobre X y $\cdot$ es la acción global sobre Y . Entonces

$$\begin{aligned} f(\alpha_g(x)) &= f(f_g(x)) \\ &= f(g * x) \\ &= g \cdot f(x) \\ &= \alpha'_g(f(x)). \end{aligned}$$

Luego f es un α -*morfismo*, y así $F(f) \in \text{Ob}(G - \mathbf{pAct})$.

3. Sean $f \in \text{Mor}_{G-\mathbf{Act}}(X, Y)$, $g \in \text{Mor}_{G-\mathbf{Act}}(Y, Z)$ y $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} (F(g) \circ F(f))(x) &= F(g)(F(f)(x)) \\ &= F(g)(f(x)) \\ &= g(f(x)) \\ &= (g \circ f)(x) \\ &= F(g \circ f)(x). \end{aligned}$$

Luego

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

4. Sea i_X la identidad de X . Entonces para $x \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} F(i_X)(x) &= i_X(x) \\ &= x \\ &= i_{F(X)}(x). \end{aligned}$$

Con lo anterior se ha probado que F es un funtor entre las categorías $G - \mathbf{Act}$ y $G - \mathbf{pAct}$, que es lo que se quería mostrar.

Ahora definamos $F : (G - \mathbf{pAct}) \longrightarrow (G - \mathbf{Act})$ de la siguiente manera:

1. Sea $X \in Ob(G - \mathbf{pAct})$ con α actuando sobre X , definimos $F(X) = X_G$, donde X_G es la globalización de X . Es claro que $X_G \in Ob(G - \mathbf{Act})$.
2. Para cada f en $Mor_{G-\mathbf{pAct}}(X, Y)$. Definimos $F(f) : X_G \longrightarrow Y_G$ por $F(f)([g, x]) = [g, f(x)]$ para todo $[g, x]$ en X_G . Veamos que $F(f)$ está bien definido.

Supongamos que $[g, x] = [h, y]$ entonces $(g, x) \sim (h, y)$ así $x \in S_{(h^{-1}g)^{-1}}$ y $\alpha_{h^{-1}g}(x) = y$. Como $x \in X$ y f es un α -*morfismo* de X en Y entonces $f(x) \in S'_{(h^{-1}g)^{-1}} \subseteq Y$ y $f(\alpha_{h^{-1}g}(x)) = \alpha'_{h^{-1}g}(f(x))$, donde $\alpha'_{h^{-1}g}$ es la acción parcial de Y . Luego, como $f(x)$ está en $S'_{(h^{-1}g)^{-1}}$ y $\alpha'_{h^{-1}g}(f(x)) = f(y)$ entonces $(g, f(x)) \sim (h, f(y))$, es decir que $[g, f(x)] = [h, f(y)]$ y por tanto $F(f)([g, x]) = F(f)([h, y])$. Con esto $F(f)$ está bien definido.

Ahora mostremos que $F(f)$ es un G -*morfismo*. Sea $[h, x] \in X_G$ y $g \in G$ entonces

$$\begin{aligned}
 F(f)(g \cdot [h, x]) &= F(f)([gh, x]) \\
 &= [gh, f(x)] \\
 &= g * [h, f(x)] \\
 &= g * F(f)([h, x]).
 \end{aligned}$$

Luego $F(f)$ es un G -*morfismo* y así $F(f) \in Mor_{G-\mathbf{Act}}(X, Y)$.

3. Sean $f \in Mor_{G-\mathbf{pAct}}(X, Y)$, $g \in Mor_{G-\mathbf{pAct}}(Y, Z)$ y $[h, x] \in X_G$. Entonces

$$\begin{aligned}
 (F(g) \circ F(f))([h, x]) &= F(g)(F(f)([h, x])) \\
 &= F(g)([h, f(x)]) \\
 &= [h, g(f(x))] \\
 &= [h, (g \circ f)(x)] \\
 &= F(g \circ f)([h, x]).
 \end{aligned}$$

Así

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

4. Sea i_X la identidad de X e i_{X_G} la identidad de X_G . Entonces para $[g, x] \in X_G$ se tiene

$$\begin{aligned} F(i_X)([g, x]) &= [g, i_X(x)] \\ &= [g, x] \\ &= i_{X_G}([g, x]) \\ &= i_{F(X)}([g, x]). \end{aligned}$$

Así F es un funtor entre las categorías $G - \mathbf{pAct}$ y $G - \mathbf{Act}$, que es lo que se quería mostrar.

Conclusiones

El desarrollo de este trabajo permitió obtener las siguientes conclusiones.

- Se presentaron las definiciones de categoría y funtor y se mostraron ejemplos de cada uno de estos conceptos para entenderlos mejor.
- Se desarrolló la teoría básica de acciones globales sobre conjuntos, con ejemplos y algunas de sus propiedades.
- Se desarrolló la teoría básica de acciones parciales sobre conjuntos a partir de la teoría conocida sobre acciones globales ([15]) y de la referencia [5].
- Se mostró que sobre conjuntos, toda acción global es una acción parcial y que a partir de una acción parcial dada se puede construir una acción global, la cual se conoce como globalización.
- Se definieron las categorías de acciones globales y parciales sobre conjuntos y se probó que la globalización es realmente un funtor de la categoría de acciones parciales a la categoría de acciones globales.

Bibliografía

- [1] F. Abadie, *Sobre ações parciais, fibrados de Fell e grupóides*, PhD Thesis, Universidade de São Paulo, 1999.
- [2] F. Abadie, *Enveloping Actions and Takai Duality for Partial Action*, J. of Functional Analysis, Vol. 197 No. 1 (2003), 14-67.
- [3] J. Ávila, S. Buitrago and S. Zapata, *The category of partial actions of a group: some constructions*, Int. J. Pure Appl. Math., 95 (1)(2014), 45-56.
- [4] M. Barr y Ch. Wells, *Category Theory for Computing*, McGill University y Case Western Reserve University, Canadá y USA, 1998.
- [5] K. Choi and Y. Lim, *Transitive Partial Actions Of Groups*, Periodica Mathematica Hungarica, Vol. 56 No. 2 (2008), 169-181.
- [6] M. Dokuchaev, A. del Río, J. J. Simón, *Globalizations of partial actions on non unital rings*, Proc. Am. Math. Soc. 135 (2007), no.2, 343-352.
- [7] M. Dokuchaev and R. Exel, *Associativity of Crossed Products by Partial Actions, Enveloping Actions and Partial Representations*, Trans. Amer. Math. Society, Vol. 357 No. 5 (2005), 1931-1952.
- [8] S. Eilenberg y S. Mac Lane, *General Theory of Natural Equivalences*, American Mathematical Society, Vol. 58 No. 2 (1945), 231-294.

- [9] R. Exel, *Partial Actions of Groups and Actions of Inverse Semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc, Vol. 126 No.12 (1998), 3481-3494.
- [10] M. Ferrero, *Partial actions of groups on semiprime rings, Groups, rings and group rings*, Lect. Notes Pure Appl. Math. 248, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, (2006), 155-162.
- [11] J. B. Fraleigh, *A first Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company Inc, Massachusetts, 1982.
- [12] I. N. Herstein, *Algebra Abstracta*, Grupo Iberoamerica, , 1988.
- [13] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer, Berlin, 2003.
- [14] J. Kellendonk and M. V. Lawson, *Partial Actions Of Groups*, International Journal of Algebra and Computation, Vol. 14 No. 1 (2004), 87-114.
- [15] A. Kerber, *Applied Finite Group Actions*, Springer, Berlin, 1999.
- [16] R. Krömer, *Tool and Object: A History and Philosophy of Category Theory*, Birkhauser, (2007).
- [17] E. Landry y J-P. Marquis, *Categories in Contexts: historical, fundamental and philosophical*, Philosophia Mathematica, (3), Vol. 13 No. 1 (2005), 1 - 43.
- [18] O. Lezama, *Teoría de categorías*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2012.
- [19] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, (5), Springer-Verlag, Second edition, New York, (1998).
- [20] J-P. Marquis, *From a Geometrical Point of View: a study in the history and philosophy of category theory*, Springer (2009).

- [21] David I. Spivak, *Category Theory for Scientists (Old Version)*, American Mathematical Society, Vol. 58 No. 2 (1945), 231-294.
- [22] B. Steinberg, *Partial actions of groups on cell complexes*, Monatsh. Math. Vol. 138 No. 2 (2003), 159-170.